Wykład 7

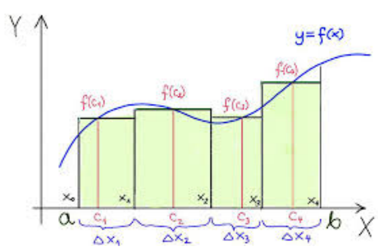
Całki podwójne

Wstęp (przypomnienie).

Żeby obliczyć z definicji $\int_a^b f(x)\,dx$ po przedziale $[a, b]$ z funkcji $f(x)$

1. dzielimy przedział na n odcinków długości Δx_i,
2. w każdym wybieramy punkt c_i (zwiemy je *punktami pośrednimi*), i
3. obliczamy sumę $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. (Jest to suma pól prostokątów, jak na rysunku poniżej.)

Jeśli odcinki podziału są bardzo małe (n jest bardzo duże), to suma ta (zwana *sumą całkową*) przybliża pole (trapeza krzywoliniowego) pod krzywą $y = f(x)$ (przy założeniu, że $f(x) > 0$).



Całkę oznaczoną definiujemy jako **granicę ciągu sum całkowych** odpowiadających ciągowi podziałów $P_n = \{\Delta x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ odcinka $[a, b]$, dla których długość $\delta(P_n)$ najdłuższego odcinka w podziale P_n dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(P_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i **nie zależy** ani od wyboru ciągu P_n podziałów odcinka $[a, b]$, ani od wyboru punktów pośrednich c_i. Mówimy wtedy, że funkcja $f(x)$ jest **całkowalna** w przedziale $[a, b]$.

Uwaga. Założenie, że granica nie zależy od „sposobu przybliżania pola”!

Najważniejsze twierdzenia rachunku całkowego, to:

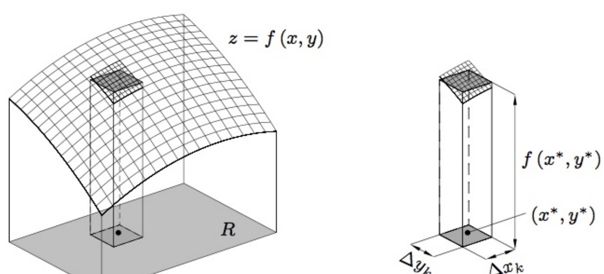
1. funkcja ciągła w przedziale, za wyjątkiem ewentualnie skończonej liczby punktów, jest całkowalna
2. całkę oznaczoną można obliczyć przy pomocy całki nieoznaczonej (funkcji pierwotnej) jako $F(b) - F(a)$.

Całka podwójna.

Definiujemy ją analogicznie, tyle że na prostokącie zamiast na odcinku. Dla danego prostokąta R o bokach równoległych do osi Ox i Oy oraz funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$:

1. dzielimy ten prostokąt na n prostokątów (które całkowicie wypełniają R i mają rozłączne wnętrza) o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k$;
2. w każdym z nich wybieramy punkt (x_k^*, y_k^*) (zwiemy je *punktami pośrednimi*),
3. obliczamy sumę $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_k \Delta y_k$. Jest to suma objętości prostopadłościanów, jak na rysunku poniżej.

Jeśli prostokąciki podziału są bardzo małe (oraz $f(x, y) > 0$), to suma ta (zwana *sumą całkową*) przybliża objętość bryły odciętej z graniastosłupa o podstawie R przez wykres funkcji $z = f(x, y)$.



Rys. 1.2. Ilustracja sumy całkowej

Całkę podwójną z funkcji $f(x, y)$ definiujemy jako granicę ciągu sum całkowych odpowiadających ciągowi podziałów $\mathcal{P}$ prostokąta R, dla których maksymalna średnica $\delta(\mathcal{P})$ prostokąta w podziale $\mathcal{P}$ dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_k \Delta y_k.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów $\mathcal{P}$ prostokąta R, ani od wyboru punktów pośrednich (x_i^*, y_i^*).

Mówimy wtedy, że funkcja $f(x,y)$ jest **całkowalna** w prostokącie R.
(*Uwaga*. Niektórzy autorzy, w tym Gewert-Skoczylas, zamiast $dx\,dy$ piszą czasami dP).

Interpretacja geometryczna. Geometrycznie wartość całki zdefiniowanej powyżej jest objętością bryły powstałej z graniastosłupa o podstawie R poprzez odcięcie wykresem funkcji $z = f(x,y)$ (jak na Rys. 1.2 powyżej).

Dokładniej, tak jest, gdy $f(x,y) > 0$ w prostokącie R. W ogólnym przypadku wartość całki jest różnicą objętości części bryły nad płaszczyzną Oxy i części pod tą płaszczyzną.

Własności całki podwójnej. Nietrudno pokazać, że tak zdefiniowana całka podwójna jest operatorem liniowym i addytywnym, to znaczy zachodzą wzory:

$$\iint\limits_R (af(x,y) + bg(x,y))\,dx\,dy = a\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy + b\iint\limits_R g(x,y)\,dx\,dy$$

oraz jeśli R_1 i R_2 są prostokątami otrzymanymi z dowolnego podziału R na dwa prostokąty, to

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Najważniejsze twierdzenie dotyczą całkowalności funkcji ciągłych i prawie ciągłych, oraz sposobów obliczania całki podwójnej.

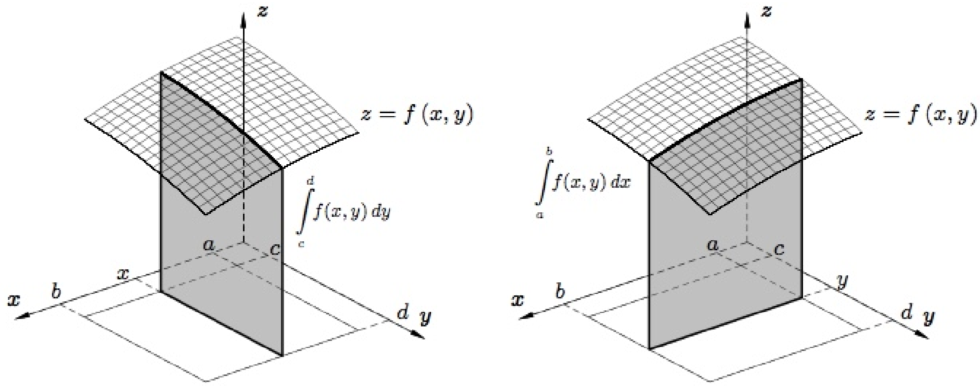
Twierdzenie *Jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w każdym punkcie prostokąta za wyjątkiem punktów, które tworzą zbiór o polu zero, to $f(x,y)$ jest całkowalna w tym prostokącie.*

Twierdzenie *Dla takiej funkcji, jeśli $R = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Uzasadnienie. Sumy całkowe podwójne, rysunek poniżej.

Całki pojedyncze pojawiające się w powyższym wzorze nazywa się *całkami iterowanymi*. Najpierw całkujemy według jednej zmiennej, traktując drugą jako stałą, a otrzymany rezultat całkujemy według drugiej zmiennej.



Rys. 1.3. Ilustracja całek iterowanych

Dla uniknięcia dużych nawiasów często stosuje się zapis beznawiasowy:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Przykład. Obliczmy $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$ gdzie $R = \{1 \leqslant x \leqslant 2,\, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$. Stosujemy pierwszy wzór z twierdzenia

$$\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x)\,dy = \int_1^2 dx \left[yx + \frac{1}{3} y^3 x \right]_{y=0}^{y=3} = \int_1^2 (3x + 9x)\,dx = \left[6x^2 \right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= 24 - 6 = 18.$$

Sprawdzamy, że drugi wzór z twierdzenia daje to samo

$$\int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x)\,dx = \int_0^3 dy \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \int_0^3 (2 + 2y^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^3 (1 + y^2) dy = \frac{3}{2} \left[y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18.$$

Całka podwójna po prostokącie jest tylko krokiem do zdefiniowania całki podwójnej po dowolnym obszarze ograniczonym D:

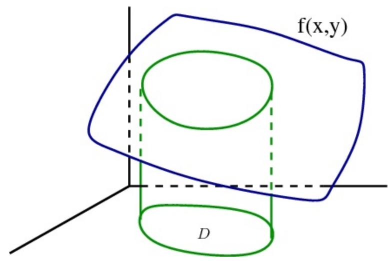
Całka podwójna po dowolnym obszarze.

Przedłużamy funkcję $f(x,y)$ określoną na obszarze D na zawierający ją prostokąt R, w ten sposób, że w punktach poza D funkcja przyjmuje wartość 0. Definiujemy więc:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_R f^*(x,y)\,dx\,dy,$$

gdzie $f^*(x,y) = f(x,y)$ dla $(x,y) \in D$ oraz $f^*(x,y) = 0$ w przeciwnym razie, a R jest dowolnym prostokątem zawierającym D – o ile całka po prawej stronie istnieje. Wtedy mówimy, że $f(x,y)$ jest **całkowalna w obszarze** D.

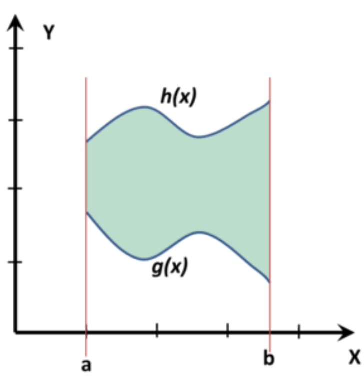
Można wykazać, że definicja ta nie zależy od wyboru prostokąta $R \supseteq D$, oraz że wyznacza objętość bryły powstałej z uogólnionego walca o podstawie D poprzez odcięcie wykresem funkcji $z = f(x,y)$ (jak na rys. poniżej).

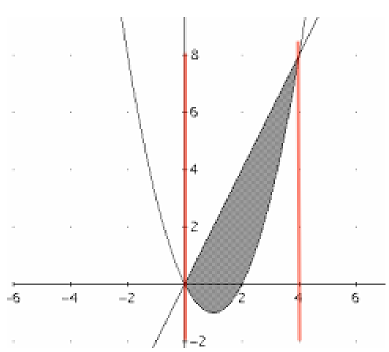


Całka taka zachowuje własności całki po prostokącie: jest operatorem liniowym i jest addytywna względem dowolnych podziałów obszaru D: jeśli $D = D_1 \cup D_2$, i D_1, D_2 mają rozłączne wnętrza, to całka po D jest sumą całek po D_1 i D_2.

Najważniejsze jest twierdzenie pozwalające sprowadzić obliczanie całek podwójnych po tzw. *obszarach normalnych* przy pomocy całek iterowanych.

Obszar postaci $D = \{(x,y): \ a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$, gdzie funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe na odcinku $[a,b]$, oraz $g(x) < h(x)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi Ox.





Dla takich obszarów mamy

TWIERDZENIE *Jeśli D jest obszarem normalnym względem osi Ox zdefiniowanym powyżej, to*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

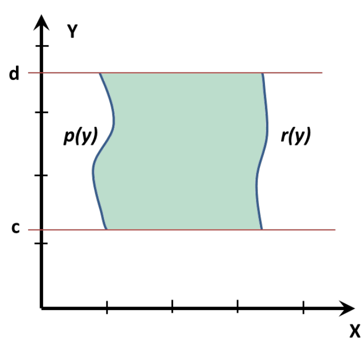
Przykład. Obliczmy objętość bryły powstałej z uogólnionego walca o podstawie $D = \{(x,y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ x^2 - 2x \leqslant y \leqslant 2x\}$ (przedstawionej na prawym rysunku powyżej) poprzez odcięcie płaszczyzną $z = x + y$. W obliczeniach całkę iterowaną, podobnie jak wcześniej, piszemy w odwrotnej kolejności bez wielkich nawiasów. Mamy

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{x^2-2x}^{2x} (x+y)\,dy = \int_0^4 dx \left[(xy + \frac{1}{2}y^2)\right]_{y=x^2-2x}^{y=2x} =$$

$$= \int_0^4 (-\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 4x^2)dx = \left[\frac{-x^5}{10} + \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{704}{15}.$$

Podobnie definiujemy obszar normalny względem osi Oy i mamy analogiczny sposób obliczania.

Obszar postaci $D = \{(x,y) :\ c \leqslant y \leqslant d, p(y) \leqslant x \leqslant r(y)\}$, gdzie funkcje $p(y)$ i $r(y)$ są ciągłe na odcinku $[c,d]$, oraz $p(y) < r(y)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi Oy

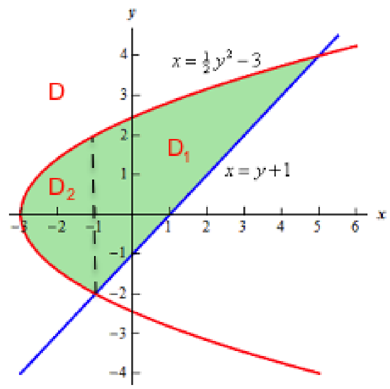


Twierdzenie *Jeśli D jest obszarem normalnym względem osi Oy zdefiniowanym powyżej, to*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Obszar regularny. Jeśli chcemy policzyć całkę podwójną po obszarze ograniczonym kilkoma różnymi krzywymi, to można go podzielić na kilka obszarów normalnych i całkę policzyć jako sumę całek po wydzielonych obszarach. Takie obszary nazywamy *regularnymi*.

Przykład. Obszar D narysowany poniżej nie jest obszarem normalnym względem osi Ox. Jest jednak obszarem regularnym, bo można go podzielić (linią przerywaną) na dwa obszary D_1 i D_2 normalne względem osi Ox.



Z drugiej strony D jest obszarem normalnym względem osi Oy. Całkę po tym obszarze możemy więc policzyć na dwa sposoby jak następuje:

$$\int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} f(x,y)\,dx = \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{-5} dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\,dy.$$