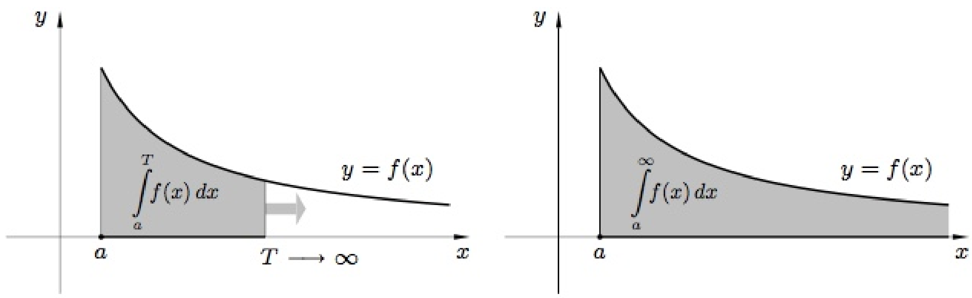
Wykład 0

Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju.

Definicja. Kryteria zbieżności. Przykłady zastosowań.

DEFINICJA. Całka funkcji $f(x)$ na przedziale $[a.\infty)$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx$$



Jeśli granica jest skończona (nieskończona, nie istnieje) to mówimy, że całka jest zbieżna (rozbieżna do ∞ lub rozbieżna).

Analogicznie na przedziale $(-\infty, a]$ definiujemy: $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_T^a f(x)dx$

PRZYKŁAD 1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$

korzystając z definicji liczymy najpierw

$$\int_2^T \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^T = -\frac{1}{T} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{T} \quad\to\quad \frac{1}{2}\ (\text{przy } T\to\infty) \quad \text{czyli} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Albo, jeśli umiemy łatwo wyliczyć granicę i wiemy, że w całce niewłaściwej chodzi o granicę, możemy całe obliczenie zapisać tak:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^\infty = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

A zatem, odpowiedni nieograniczony obszar pod krzywą $y = \frac{1}{x^2}$ ma skończone pole $= \frac{1}{2}$.

Przykład 2. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \Big[e^x(x-1)\Big]_{-\infty}^{0} = -1 - 0 = -1,$$

(bo stosując regułę de l'Hospitala: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{e^{-x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$).

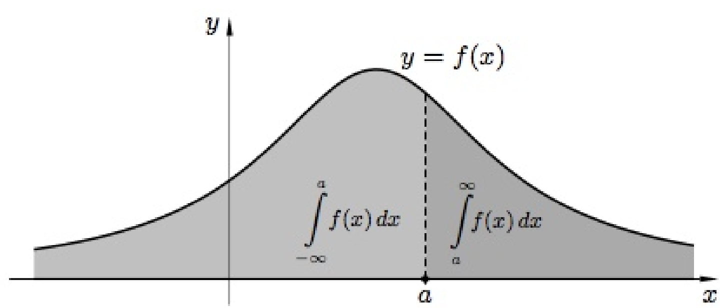
Przykład 3. $\int\limits_{\pi}^{\infty} \sin x dx$

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{\infty} = ? \quad \text{granica nie istnieje, całka rozbieżna.}$$

Definicja. Jeśli funkcja $f(x)$ określona jest na całej prostej $\mathbb{R}$ to całkę po całej prostej definiujemy:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. (Dowodzi się, że rezultat nie zależy od wyboru a i (dla funkcji dodatniej) równy jest polu jak na rysunku poniżej).



Rys. 1.3. Ilustracja całki na prostej

Przykład 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+4}dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}dx = \Big[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

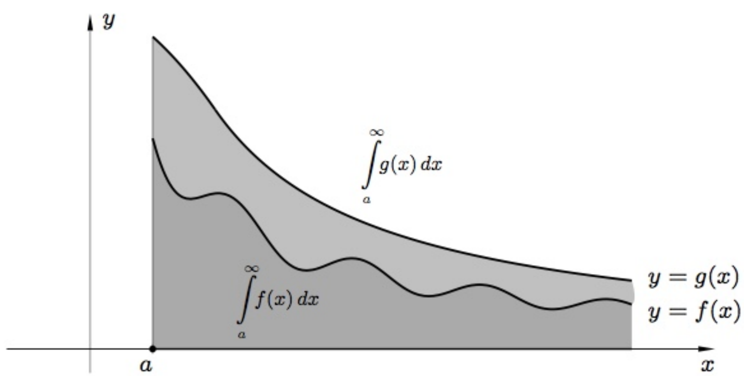
Kryterium porównawcze. Pytanie o zbieżność całki niewłaściwej.

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje f i g spełniają w przedziale $x \in [a, \infty]$ nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, to*

a) *Jeśli całka* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *jest zbieżna, to całka* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *też jest zbieżna,*

b) *Jeśli całka* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *jest rozbieżna, to całka* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *też jest rozbieżna,*

Dowód. Istota dowodu: patrzymy na pola...

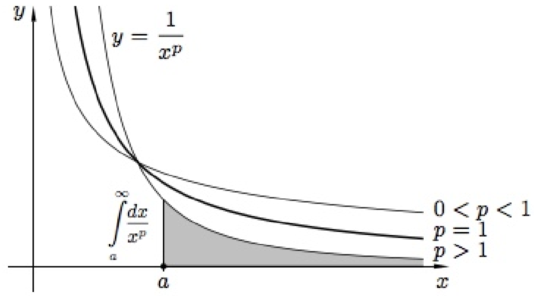


* wystarczy, że nierówność zachodzi od pewnego miejsca $a_1 > a$;

** analogiczne rezultaty można sformułować dla każdej ćwiartki (całki od $-\infty$, funkcje zawsze ujemne).

W związku z tym kryterium przydatne jest:

TWIERDZENIE. *Całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}dx$, *$a > 0$, jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \leqslant 1$.*



Rys. 1.4. Wykresy funkcji $y = \dfrac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Dowód. Dla $p \neq 1$ mamy $\int\limits_a^\infty \dfrac{dx}{x^p}dx = \left[-\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^\infty$, a dla $p = 1$ mamy $\int\limits_a^\infty \dfrac{dx}{x}dx = \left[\ln x\right]_a^\infty$

Uwaga. Taki sam rezultat zachodzi dla całek niewłaściwych $\int\limits_{-\infty}^b \dfrac{dx}{x^p}dx$, $b < 0$, dla tych p, dla których funkcja $\dfrac{1}{x^p}$ jest dobrze określona w dziedzinie $x < 0$.

Przykład 5. $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx \leqslant \int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x^{4/3}}dx < \infty$; obie są zbieżne.

Kryterium ilorazowe.

Twierdzenie. *Niech funkcje f, g będą obie dodatnie (ujemne) na półprostej $[a, \infty]$ oraz niech spełniają $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, gdzie $0 < k < \infty$, wówczas całki $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.*

Dowód. Idea: $f(x) \leqslant C \cdot kg(x)$ i kryterium porównawcze...

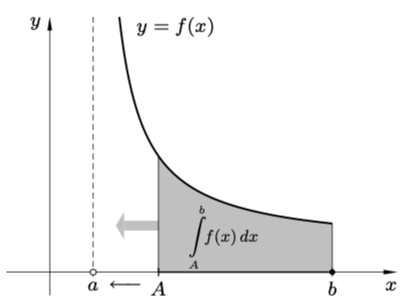
Uwaga: prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla półprostej $(-\infty, b]$.

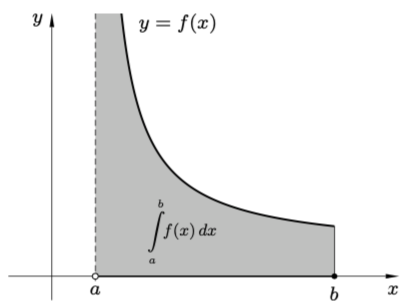
Przykład 6. $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}}dx.$

Przyjmując $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ oraz $f(x) = \dfrac{1}{x^{4/3}}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4-1}{x^4}} = \sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^4}} \;\to\; 1$ dla $x \to \infty$. Ponieważ $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x^{4/3}}dx$ jest zbieżna, więc wyjściowa całka też jest zbieżna.

* **Całki niewłaściwe drugiego rodzaju** – gdy $f(x) \to \pm\infty$ w punkcie x dziedziny. Np. $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2}dx$.



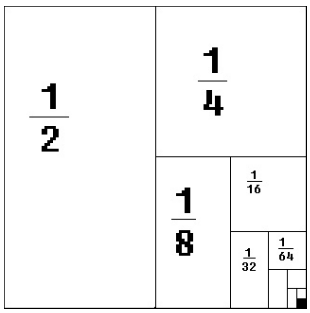


Wykład 1

Szeregi liczbowe.
Definicje. Podstawowe kryteria zbieżności.

Paradoks Zenona: Achilles nigdy nie dogoni żółwia...

Nieskończony podział kwadratu



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

$$1+1+1+1+\ldots=\infty$$

Definicja *Szereg* (liczbowy) to wyrażenie $a_1+a_2+a_3+\ldots$ lub $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Suma częściowa $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

szereg *zbieżny*, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=g\in\mathbb{R}$ (piszemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=g$)

w przeciwnym razie *rozbieżny* (do ∞ lub $-\infty$, jeśli granica niewłaściwa)

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots \qquad S_n=?$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1$ przy $n\to\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Fakty.

□ To czy szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny nie zależy od n_0 $\quad$ ($\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ zbieżny $\iff$ $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ zbieżny;

w niektórych rachunkach można pomijać granice...)

□ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ zbieżny $\iff$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} c \cdot a_n$ zbieżny $\quad$ i w takim przypadku $\sum_{n=n_0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

□ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ zbieżne $\implies$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ też zbieżny i $= \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

(implikacja tylko w jedną stronę!)

ALE! UWAGA:

nie można dowolnie grupować wyrazów

$$(1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \dots\right) + \dots = 0$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots\right) - \dots = 1$$

ani dowolnie przestawiać ...

Przykład Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots =,$$

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} \quad \text{gdy} \quad |x| < 1$$

Przykład $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n+1}} = \sum \frac{2}{3}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 6$

☐ (Warunek konieczny zbieżności szeregu) *Jeśli* $\sum a_n$ *zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

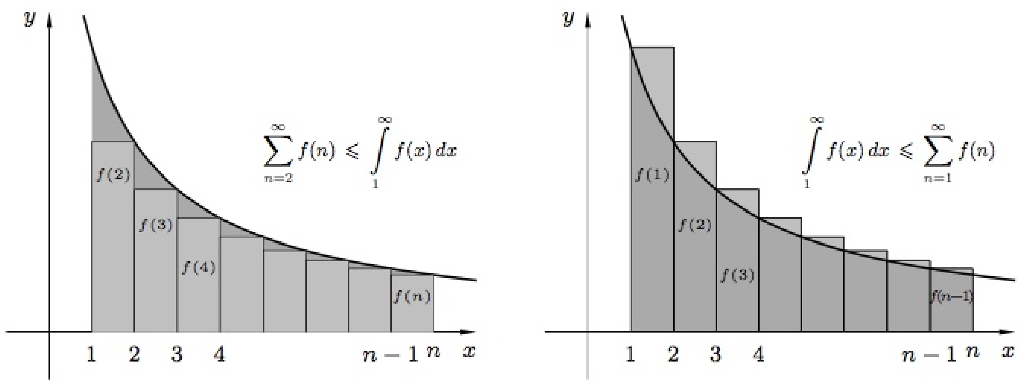
Uwaga. To nie jest warunek wystarczający

$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ rozbieżny do ∞ *szereg harmoniczny* (sprawdzimy dalej)

Kryteria zbieżności szeregów

☐ (Kryterium całkowe) $f(x) \geqslant 0$, nierosnąca na $[m, \infty)$, to

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ zbieżny} \iff \int_m^{\infty} f(x)dx \text{ zbieżna.}$$



Rys. 2.1. Ilustracja kryterium całkowego zbieżności szeregów

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \; ? \qquad \int_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \Big[\ln x\Big]_1^{\infty} = \infty \qquad \text{szereg rozbieżny}$$

Uwaga. Można stosować dla $f(x) \leqslant 0$ niemalejących (wyjąć znak minus przed nawias)

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ zbieżny $\iff$ $p > 1$

☐ (Kryterium porównawcze) $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (od pewnego $n \geqslant n_0$). Wtedy

a) $\sum b_n$ zbieżny $\implies$ $\sum a_n$ zbieżny

a) $\sum a_n$ rozbieżny $\implies$ $\sum b_n$ rozbieżny

Przykład 1

$\sum \frac{n}{n^3+1}$? , $\quad \frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ szereg zbieżny

Można to zapisać tak: $\sum \frac{n}{n^3+1} < \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

Przykład 2

$\sum \frac{n}{n^3-1}$? , $\quad \frac{n}{n^3-1} > \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$???

Można to zapisać tak: $\sum \frac{n}{n^3-1} > \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ z takich nierówności nic nie wynika...

Wiemy, że $\sum \frac{n}{n^3-1} \sim \sum \frac{1}{n^2}$, trzeba dobrać współczynnik do nierówności <

$\frac{n}{n^3-1} < 2\frac{n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$ bo $n^4 < 2n^4 - 2$ dla $n \geqslant 2$ (wystarczy od pewnego miejsca)

a więc $\sum \frac{n}{n^3-1} < 2\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ szereg zbieżny

Przykład 3

$\sum n \sin \frac{1}{n^2}$? , $\quad n \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(n^2 \sin \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$

trzeba dobrać nierówność >

$$n \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(n^2 \sin \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$$

$\sum n \sin \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} > \infty$ szereg rozbieżny

□ (**Kryterium ilorazowe**) $a_n, b_n > 0$ (od pewnego $n \geqslant n_0$).

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ (czyli $a_n \sim b_n$) $\implies$ $\sum a_n, \sum b_n$ jednocześnie zbieżne lub rozbieżne

Uwaga: Tu warto znać granice ilorazów, np. $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \sim \arcsin\frac{1}{n}$

□ (**Kryterium d'Alemberta**) $a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \implies \text{szereg } \sum a_n \text{ dla } \begin{cases} q < 1 & \text{zbieżny} \\ q > 1 & \text{rozbieżny} \end{cases}$$

PRZYKŁADY

$$\sum \frac{2^n}{n!} \ ? \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n} \to 0 \text{ (przy } n \to \infty) \text{ — zbieżny}$$

Jeśli $q = 1$ to kryterium nie rozstrzyga: np. $\sum \frac{1}{n^2}$ oraz $\sum \frac{1}{n}$ – oba maja granicę $q = 1$, ale pierwszy zbieżny, a drugi rozbieżny.

□ (**Kryterium Cauchy'ego**) $a_n \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \implies \text{szereg } \sum a_n \text{ dla } \begin{cases} q < 1 & \text{zbieżny} \\ q > 1 & \text{rozbieżny} \end{cases}$$

PRZYKŁAD

$$\sum \frac{n^{100}}{\pi^n} \ ? \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{100}}{\pi} \to \frac{1}{\pi} \text{ (przy } n \to \infty) \text{ — zbieżny}$$

Uwaga: Dotychczasowe kryteria: szeregi o wyrazach nieujemnych (od pewnego miejsca) – lub o wyrazach niedodatnich (wyjęcie znaku minus przed szereg).

Szeregi naprzemienne (nieskończenie wiele wyrazów > 0 i nieskończenie wiele wyrazów < 0).

Szczególny przypadek:

□ (**Kryterium Leibniza**) *Jeśli ciąg b_n jest malejący (lub ogólniej nierosnący) od pewnego miejsca, oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ jest zbieżny.* (takie szeregi nazywamy *szeregami naprzemiennymi*)

PRZYKŁAD. Ciąg $b_n = 1/(n - \ln n)$ jest malejący do 0, bo ciąg $a_n = n - \ln n$ jest rosnący do ∞ (sprawdzenie: $a_{n+1} - a_n = ((n+1) - \ln(n+1)) - (n - \ln n) =$

$1 + \ln \dfrac{n}{n+1} > 0)$.
A zatem $\sum (-1)^n \dfrac{1}{n - \ln n}$ spełnia kryterium Leibniza i jest zbieżny.

Podobnie $\sum \dfrac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$ jest naprzemienny, spełnia kryterium Leibniza, a więc jest zbieżny.

Definicja (**Bezwzględna zbieżność**). O szeregu *zbieżnym* $\sum a_n$ mówimy, że jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli szereg $\sum |a_n|$ też jest zbieżny.

Twierdzenie. *Zbieżność szeregu $\sum |a_n|$ pociąga za sobą zbieżność $\sum a_n$.*

Dowód: $\sum |a_n| > \sum a_n > \sum -|a_n|$ ....

Definicja. (**Zbieżność warunkowa**). O szeregu zbieżnym $\sum a_n$, który nie jest bezwzględnie zbieżny mówimy, że jest *zbieżny warunkowo*.

Przykładem takiego szeregu jest *szereg aharmoniczny* $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, bo szereg harmoniczny $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Wykład 2

Szeregi potęgowe.

Promień i przedział zbieżności. Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda.
Szeregi Taylora i Maclaurina.

Definiowanie funkcji: $f(x) = \sum f_n(x)$ szereg funkcyjny, dziedzina zbieżności

Definicja (**Szereg potęgowy**). Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots$$

nazywamy *szeregiem potęgowym* o środku $x_0 \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $c_n \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie (**Cauchy'ego-Hadamarda**). *Dla każdego szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *istnieje liczba* $R \geqslant 0$ *lub* $R = \infty$*, taka że szereg ten jest* ***bezwzględnie zbieżny*** *w każdym punkcie* x *przedziału otwartego* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *oraz jest rozbieżny na zewnątrz tego przedziału dla* $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.

Przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$ (o środku x_0 i promieniu R) nazywa się *przedziałem zbieżności* danego szeregu potęgowego (dla $R = \infty$ jest to cała prosta $\mathbb{R}$). Wartość R nazywamy *promieniem zbieżności* tego szeregu.

Twierdzenie ***Promień zbieżności*** *szeregu potęgowego można obliczyć jednym ze wzorów* (opartych na kryteriach Cauchy'ego i D'Alemberta):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{lub} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Wzór daje poprawną wartość, jeśli granica taka istnieje lub wynosi $R = \infty$. (Jeśli granice te nie istnieją i nie są równe ∞, to promień R oblicza się przy pomocy *granicy supremum* – co wychodzi poza zakres tego wykładu).

Uwaga: Twierdzenie C-H nie rozstrzyga zbieżności w punktach granicznych $x = x_0 - R$ oraz $x_0 + R$. Tu może być różnie. Dziedzina zbieżności jest więc: przedziałem otwartym, półotwartym lub domkniętym, lub całą prostą (gdy $R = \infty$) albo punktem $\{x_0\}$ (gdy $R = 0$).

Przykład 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$.

Ponieważ $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, wiec promień $R = 1$ i środek $x_0 = 2$. Dla $x = 1$ mamy $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ – zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Dla $x = 3$ mamy $\sum \frac{1}{n}$ – szereg harmoniczny, rozbieżny. A zatem, przedział zbieżności $[1, 3)$, półotwarty.

Przykład 2 (trudniejszy!) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^{2n}}{2^n}$.

Jest to szereg potęgowy, bo można go zapisać jako $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^{2n}$. Współczynniki nieparzyste c_{2n+1} tego szeregu są równe zero, więc nie da się zastosować wzorów na promień R. Ale można obliczyć R bezpośrednio.

Traktujemy x jako stałą (parametr) i sprawdzamy dla jakich x szereg jest bezwzględnie zbieżny. Stosując kryterium Cauchy'ego: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(2x-3)^{2n}}{2^n}\right|} = \left|\frac{(2x-3)^2}{2}\right| = \frac{(2x-3)^2}{2} < 1$. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy gdy $4x^2 - 12x + 7 < 0$. Rozwiązując tę nierówność kwadratową otrzymujemy $x \in (\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$, a więc przedział zbieżności ma środek $x_0 = \frac{3}{2}$ i promień $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Należy jeszcze sprawdzić osobno, czy w punktach granicznych badany szereg jest zbieżny. Dla $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ mamy $\sum 2^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \sum 1$, rozbieżny do ∞. To samo wychodzi dla drugiego końca. Zatem dziedziną zbieżności badanego szeregu jest przedział otwarty $(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy; szeregi Taylora i Maclaurina.

Poniżej zakładamy, że rozważana funkcja $f(x)$ ma **pochodne wszystkich rzędów** w pewnym otoczeniu punktu x_0. Przypomnijmy, że zgodnie ze wzorem Taylora, funkcję taką można wyrazić wielomianem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x-x_0)^n,$$

gdzie c jest pewnym punktem pomiędzy x_0 i x (czyli $c \in (x_0, x)$ lub (x, x_0) w zależności od tego czy $x > x_0$, czy $x < x_0$).

Jeśli dla punktów x w otoczeniu punktu x_0 reszta $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$ dąży do 0 przy $n \to \infty$, to w otoczeniu tym mamy równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

W takim przypadku mówimy o rozwinięciu funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy (w tym otoczeniu). Szereg potęgowy z takimi współczynnikami nazywamy *szeregiem*

Taylora funkcji $f(x)$. Dla $x_0 = 0$ rozwinięcie to przybiera postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

którą nazywamy *szeregiem Maclaurina.*

Uwaga. Istnienie takich rozwinięć dla konkretnych funkcji trzeba udowodnić pokazując, że *n-ta reszta* we wzorze Taylora $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$ dąży do 0 przy $n \to \infty$. Ponieważ wartość c w tej reszcie zależy od n i nie jest podana jawnym wzorem, na ogół stosuje się oszacowania bezwzględnej wartości reszt $|R_n|$ i pokazuje się, że dane oszacowanie dąży do zera. Na przykład, często wystarczy pokazać, że $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ w pewnym otoczeniu x_0, dla wszystkich n.

PRZYKŁAD. Dla funkcji $f(x) = e^x$ mamy $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, a zatem, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ istnieje c takie że

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^c.$$

Ponieważ (dla ustalonego x) $|e^c| < e^x$, reszta $\frac{x^n}{n!} e^c$ dąży do 0 przy $n \to \infty$. A zatem dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

W podobny sposób otrzymujemy rozwinięcia Maclaurina innych podstawowych funkcji. Najważniejsze z nich podane są w tabelce poniżej. W zastosowaniach stosujemy kombinacje liniowe poniższych wzorów, w tym mnożenie lub dzielenie przez x^k, a także podstawienia.

Szeregi Maclaurina niektórych funkcji elementarnych

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ dla $|x| < 1$;
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots$ dla $-1 < x \leqslant 1$;
- $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dots$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- $(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ dla $|x| < 1$, gdzie $\binom{p}{n} = \dfrac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}$, $p \in \mathbb{R}$.

Przykład. $e^{-x} = 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dots$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, natomiast $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} \dots$ dla $x \neq 0$.

Uwaga. Funkcja $f(x)$ może nie mieć rozwinięcia w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0 (wówczas reszta R_n we wzorze Taylora nie dąży do zera). Ale jeśli ma, to jest to jej szereg Taylora:

Twierdzenie (o jednoznaczności rozwinięcia). *Jeśli* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ *w pewnym otoczeniu punktu* x_0*, to dla wszystkich* $n = 0, 1, 2, \dots$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Przykład. Ile wynosi pochodna $f^{(100)}(0)$ dla funkcji $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$? Z tabeli: $\dfrac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ dla $|x| < \frac{1}{3}$. Zgodnie z twierdzeniem jest to szereg Maclaurina funkcji $f(x)$, a zatem z jednej strony $c_{100} = 3^{100}$, a z drugiej strony $c_{100} = \dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}$. A zatem $f^{(100)}(0) = 3^{100} \cdot 100!$

Rozwinięcia innych funkcji umożliwiają twierdzenia o różniczkowaniu i całkowaniu szeregu potęgowego.

Twierdzenie. *Niech* R $(0 < R < \infty)$ *będzie promieniem szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. *Wtedy*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{dla każdego} \quad x \in (-R, R);$$

Twierdzenie. *Niech* R $(0 < R < \infty)$ *będzie promieniem szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. *Wtedy*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{dla każdego} \quad x \in (-R, R).$$

Uwaga: Te operacje zachowują promień zbieżności. Podobne twierdzenia dla szeregów Taylora.

Przykład 1. Różniczkując dwukrotnie równość

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2},$$

którą można przekształcić do

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n.$$

Jest to rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\frac{1}{(1+x)^3}$. Promień zbieżności $R = 1$.

Przykład 2. Całkując równość Przykładu 1 (używając odpowiednio dwóch zmiennych)

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt$$

otrzymujemy

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

czyli jeden z wzorów z tabelki powyżej.

Wykład 3

Funkcje dwóch zmiennych: wprowadzenie

Podstawowe pojęcia dotyczące zbiorów na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Płaszczyzna (*przestrzeń dwuwymiarowa*) to zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) liczb rzeczywistych, natomiast ***Przestrzeń*** (*trójwymiarowa*) to zbiór wszystkich trójek uporządkowanych (x, y, z) liczb rzeczywistych.

Przestrzenie te reprezentujemy graficznie w postaci układu współrzędnych z osiami Ox, Oy i Oz. Symbolicznie oznaczamy je

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Odległość między punktami $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ na płaszczyźnie wyraża się wzorem

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Odległość między punktami $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ w przestrzeni wyraża się wzorem

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Otoczeniem $O(P_0, r)$ punktu P_0 o promieniu r na płaszczyźnie (w przestrzeni) nazywamy koło otwarte (kulę otwartą) zadane wzorem $\{P : |PP_0| < r\}$.

Punkt wewnętrzny. Zbiór A na płaszczyźnie to zbiór punktów (x, y) spełniających określone warunki. Zbiór taki jest *ograniczony*, jeśli zawarty jest w pewnym kole. Punkt $(x, y) \in A$ nazywamy *punktem wewnętrznym* tego zbioru, jeśli pewne otoczenie tego punktu zawarte jest w całości w zbiorze A. Punkt $(x, y) \notin A$ nazywamy *punktem zewnętrznym* zbioru A, jeśli pewne otoczenie tego punktu zawarte jest w całości w dopełnieniu $\mathbb{R} \setminus A$ zbioru A na płaszczyźnie.

Punkt brzegowy. Punkt P płaszczyzny, który nie jest ani wewnętrzny ani zewnętrzny dla zbioru A nazywamy *punktem brzegowym* zbioru A. Innymi słowy, punkt P jest punktem brzegowym A wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym jego otoczeniu są zarówno punkty należące do A jak i punkty nienależące do A.

Zbiór domknięty. Zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru A nazywamy jego *brzegiem*. Zbiór A nazywamy *zbiorem domkniętym*, jeśli cały brzeg A zawarty jest w A. Zbiór A jest *otwarty*, jeśli jego dopełnienie na płaszczyźnie $\mathbb{R} \setminus A$ jest zbiorem domkniętym.

PRZYKŁAD. Brzegiem koła o środku P i promieniu r jest okrąg o środku P i promieniu r. Koło wraz z brzegiem jest zbiorem domkniętym, a koło bez brzegu jest zbiorem otwartym. Jeśli tylko część brzegu dołączymy do koła to otrzymamy zbiór, który nie jest ani domknięty ani otwarty.

Analogiczne definicje stosujemy w przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W razie potrzeby, dodatkowe szczegóły i ilustracje można znaleźć w podręczniku Gewert-Skoczylas na stronach 51-55.

Funkcje dwóch zmiennych

Funkcją dwóch zmiennych $f : A \to \mathbb{R}$ określoną na zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $(x, y) \in A$ dokładnie jednej wartości $z \in \mathbb{R}$, co zapisujemy wzorem $z = f(x, y)$. Analogiczną definicję przyjmujemy dla funkcji trzech zmiennych $u = g(x, y, z)$.

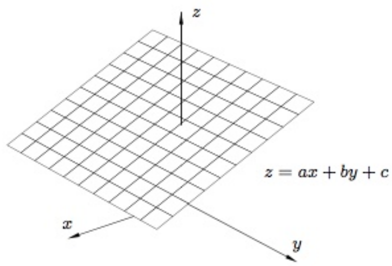
Dziedzina naturalna. Jeśli funkcja $f(x, y)$ określona jest wzorem $z = f(x, y)$, bez podania dziedziny, wtedy przyjmujemy tzw. *dziedzinę naturalną*, przez co rozumiemy zbiór tych wszystkich par (x, y), dla których wyrażenie $f(x, y)$ jest określone.

Przykład. Niech $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$. Wyrażenie to określone jest tylko dla par (x, y) spełniających $x^2 + y^2 < 1$. Dziedziną naturalną tej funkcji jest więc koło otwarte o środku $(0, 0)$ i promieniu 1.

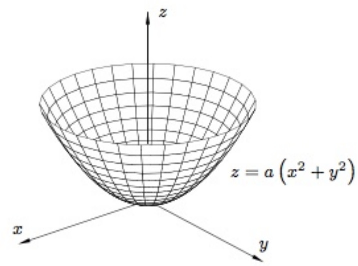
Wykresem funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ o dziedzinie D nazywamy zbiór W w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dany wzorem $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$. (Typowe wykresy przedstawione są na rysunkach poniżej).

Wykresy ważniejszych funkcji dwóch zmiennych

- Wykresem funkcji $z = Ax + By + C$ jest *płaszczyzna*.
- Wykresem funkcji $z = a\left(x^2 + y^2\right)$ $(a \neq 0)$, jest *paraboloida obrotowa*, tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$, $y = 0$, wokół osi Oz.

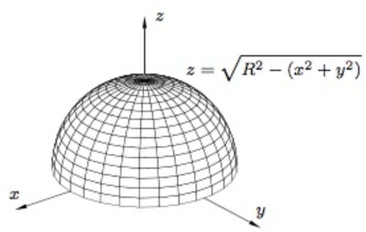


Rys. 2.5. Płaszczyzna

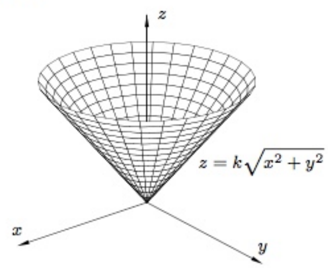


Rys. 2.6. Paraboloida obrotowa

- Wykresem funkcji $z = \pm\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ $(R > 0)$ jest górna $(+)$ lub dolna $(-)$ *półsfera* o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R.
- Wykresem funkcji $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ $(k \neq 0)$ jest *stożek*, tj. powierzchnia powstała z obrotu półprostej $z = kx$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$ wokół osi Oz.



Rys. 2.7. Górna półsfera



Rys. 2.8. Stożek

Poziomicą nazywamy przecięcie wykresu funkcji f z płaszczyzną $z = z_0$, czyli krzywą o równaniu $f(x, y) = z_0$.

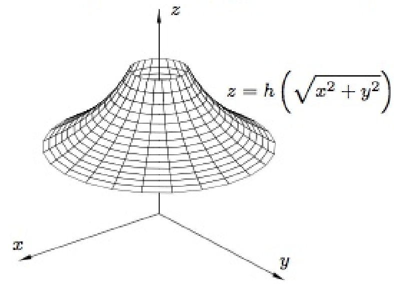
Powierzchnia obrotowa to powierzchnia powstała z obrotu krzywej wokół ustalonej osi. Poziomice powierzchni obrotowej, której osią jest Oz są okręgami.

Zwykle rozważmy powierzchnię obrotową powstałą z obrotu wykresu funkcji (monotonicznej) jednej zmiennej $z = h(x)$ $(y = 0)$ wokół osi Oz. Wtedy:
– Poziomice są okręgami o promieniu $z = h(x)$: na poziomie $z = z_0$ jest to $x = h^{-1}(z_0)$.
– Równanie powierzchni obrotowej $x^2 + y^2 = (h^{-1}(z))^2$.
– czyli (dla części $z \geqslant 0$) równanie $z = h\left(\sqrt{(x^2 + y^2)}\right)$ (por. Rys. 2.9 poniżej).

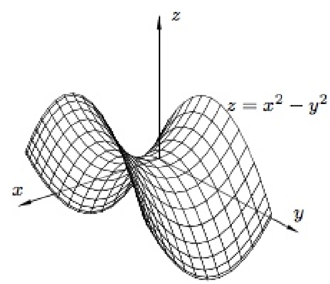
Stąd wynika, że każda powierzchnia, w której równaniu x i y występują tylko w wyrażeniu postaci $x^2 + y^2$ jest ***powierzchnią obrotową***, której osia jest oś Oz.

Przykład. Powierzchnia $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) = \ln(1 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2)$.
Wykres: obrót wykresu funkcji $h(x) = \ln(1 - x^2)$ (uzyskanej po wstawieniu $y = 0$).
Narysuj.
Dziedzina: koło otwarte o środku $(0, 0)$ i promieniu 1.

• Wykresem funkcji $z = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ jest *powierzchnia obrotowa* powstała z obrotu wykresu funkcji $z = h(x)$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$ wokół osi Oz.
• Wykres funkcji $z = x^2 - y^2$ przedstawia „siodło”.

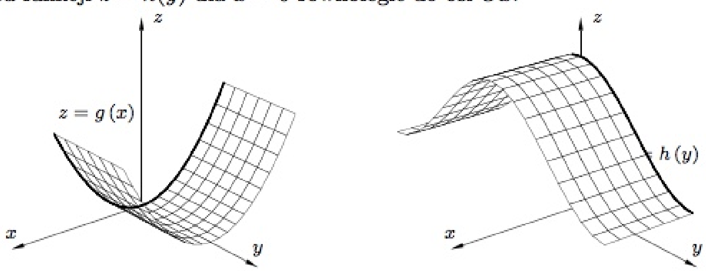


Rys. 2.9. Powierzchnia obrotowa



Rys. 2.10. „Siodło”

• Wykresem funkcji $z = g(x)$ lub $z = h(y)$ jest *powierzchnia walcowa* powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równolegle do osi Oy lub odpowiednio wykresu funkcji $z = h(y)$ dla $x = 0$ równolegle do osi Ox.



Rys. 2.11. Powierzchnie walcowe

Powierzchnia walcowa (definiowana względem osi Oz) to powierzchnia w przestrzeni dana wzorem $z = g(x)$ lub $z = h(y)$. Otrzymujemy je przez przesunięcie wykresów funkcji jednej zmiennej jak objaśnione na rysunkach powyżej.

Modyfikacje wykresów. Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, mając wykres funkcji $z = f(x, y)$ łatwo wyobrazić sobie wykresy następujących funkcji z $a, b > 0$:

- $z = f(x, y) \pm a$ przesunięcie wykresu w górę/w dół wzdłuż osi Oz o wektor długości a;
- $z = af(x, y)$, rozciągnięcie/spłaszczenie wykresu wzdłuż osi Oz o czynnik a (w zależności od tego czy $a > 1$ czy $a < 1$);
- $z = -f(x, y)$, odbicie wykresu względem płaszczyzny $z = 0$;
- $z = f(x \pm a, y \pm b)$ przesunięcie wykresu równolegle do płaszczyzny $z = 0$ o wektor $(\mp a, \mp b)$;
- $z = f(ax, by)$, rozciągnięcie/ściśniecie wykresu wzdłuż osi Ox i Oy o czynniki a i b (w zależności od tego czy są one $>$ czy < 1).

Przykład. Naszkicować wykres funkcji $z = 6 - \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$.

1. Stosując powyższe obserwacje stwierdzamy, że jest to wykres funkcji $z = -\sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$ przesunięty w górę o 6.

2. Ten z kolei jest odbiciem wykresu funkcji $z = \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$ względem płaszczyzny $z = 0$.

3. Kolejny krok to pozbycie się czynników liniowych pod pierwiastkiem. Poprzednią równość możemy przekształcić do $z = \sqrt{5 - (x-1)^2 + -(y-2)^2}$. Jest to wykres funkcji $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ przesunięty równolegle do płaszczyzny $z = 0$ o wektor $(1, 2)$.

4. Ostatni wykres to górna półsfera sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ (zob. komentarz do Rys. 2.7 powyżej).

Odwracając rozumowanie mamy zatem półsferę górną o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu $\sqrt{5}$. Przesuwamy ją równolegle do płaszczyzny $z = 0$ o wektor $(1, 2)$. Odbijamy względem płaszczyzny $z = 0$, i przesuwamy równolegle do osi Oz o wektor długości 6. To się da krótko ująć następująco:

Odpowiedź. Wykresem funkcji $z = 6 - \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$ jest półsfera dolna o środku w punkcie $(1, 2, 6)$ i promieniu $\sqrt{5}$.

Dodatkowe szczegółowo omówione przykłady można znaleźć w podręczniku Gewert-Skoczylas na stronach 73-75.

Granica funkcji dwóch zmiennych*

Definicja. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g$, jeśli dla każdej pary ciągów $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$,
ciąg liczbowy $f(x_n, y_n) \to g$. (także dla $g = \pm\infty$).
(Rysunek.)

Przykłady

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x - 2y}{x^2 + y^2} = \frac{x_0 - 2y_0}{x_0^2 + y_0^2}$, o ile $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Dla $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mamy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$; w tym przypadku granica nie istnieje, bo dążąc do $(0, 0)$ po różnych drogach wychodzi różnie. (Sprawdzić).

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$,

tu też symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$, jednak wybierając różne drogi ciągle dostajemy ten sam wynik; próbujemy więc wykazać, że granica istnieje
tu stosujemy albo podstawienie $z = x^2 + y^2$ i stosujemy regułę de'lHospitala albo odpowiednio przekształcamy całe wyrażenie)

$$\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \quad = \quad \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{(1+x^2+y^2)-1} \quad =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{(\sqrt{1+x^2+y^2}-1)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)} \quad =$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1} \quad \to \quad \frac{1}{2} \quad \text{przy} \quad (x,y) \to (0,0).$$

* Dalej, podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, definiujemy *ciągłość funkcji w punkcie* (granica funkcji równa się wartości). Podobnie dochodzimy do ogólnego wniosku, że *wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w dziedzinie określoności* (a więc obliczanie granic sprowadza się zasadniczo do podstawiania wartości). Analogicznie dla funkcji wielu zmiennych.

W rachunku różniczkowym pojawiają się natomiast *pochodne cząstkowe*.

Wykład 4
Pochodne cząstkowe

Pochodna $f'(x)$ funkcji jednej zmiennej jest miarą tempa wzrostu funkcji $f(x)$, pozwala wyznaczyć styczną do wykresu funkcji w danym punkcie, wyznaczyć jej ekstrema. Analogiczne zagadnienia dla funkcji dwóch zmiennych to: tempo wzrostu funkcji w danym kierunku, płaszczyzna styczna do wykresu w danym punkcie, lokalne ekstrema.

Odpowiednikiem pochodnej dla funkcji dwóch zmiennych są *pochodne kierunkowe*, w tym dwie podstawowe pochodne w kierunkach osi Ox i Oy zwane *pochodnymi cząstkowymi*.

Definicja Dla danej funkcji $f(x,y)$ dwóch zmiennych następujące granice

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

nazywamy *pochodnymi cząstkowymi* funkcji $f(x,y)$ względem x (względem y) w punkcie (x_0,y_0).

Uwaga. W podręcznikach stosuje się też bardziej tradycyjne oznaczenia pisząc $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$ zamiast $f'_x(x_0,y_0)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ zamiast f'_y. Ułamek w powyższych wzorach nazywa się *ilorazem różnicowym* funkcji $f(x,y)$ względem danej zmiennej. Podobnie jak w przypadku zwykłej pochodnej funkcji jednej zmiennej, jest to stosunek przyrostu funkcji do przyrostu zmiennej, tyle że mierzony dla jednej zmiennej.

W przypadku gdy pochodne cząstkowe istnieją dla wszystkich punktów jakiegoś obszaru wyznaczają one funkcje dwóch zmiennych, które również nazywamy *pochodnymi cząstkowymi* i oznaczamy $f'_x(x,y)$ oraz $f'_y(x,y)$.

Przykład. Niech $f(x,y)=x^2+y^2$. Wtedy

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2+y_0^2-(x_0^2+y_0^2)}{\Delta x} = \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+y_0^2-x_0^2-y_0^2}{\Delta x} = 2x_0+\Delta x.$$

a zatem $f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0$

Podobnie $f'_y(x_0,y_0) = 2y_0$

To zachodzi dla dowolnych x_0 i y_0. Mamy zatem $f'_x(x,y)=2x$ i $f'_y(x,y)=2y$.

Uwaga. Powyższe rezultaty otrzymamy także różniczkując zwyczajnie funkcję $x^2 + y^2$ jako funkcję jednej zmiennej, drugą zmienną traktując jako stałą. Na przykład, przyjmując, że $f(x) = x^2 + y^2$, gdzie y traktujemy jako stałą, otrzymujemy $f'(x) = (x^2 + y^2)'_x = 2x$.

Metoda obliczanie pochodnych cząstkowych. *Dla obliczenia pochodnej cząstkowej funkcji wielu zmiennych względem danej zmiennej, należy funkcję potraktować jako funkcję tej jednej zmiennej, a pozostałe zmienne traktować jako stałe.*

PRZYKŁAD $f(x,y) = \frac{x}{y} + x \sin y$;

$f'_x(x,y) = (\frac{x}{y} + x\sin y)'_x = \frac{1}{y} + \sin y$,

$f'_y(x,y) = (\frac{x}{y} + x\sin y)'_y = -\frac{x}{y^2} + x\cos y$.

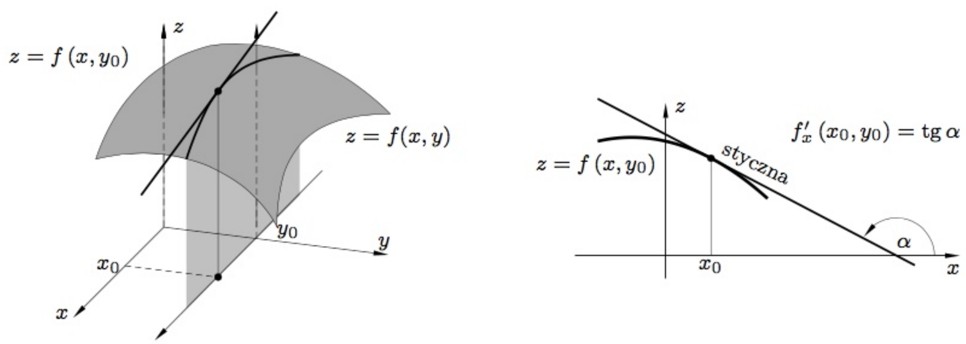
Uwaga. Pochodne cząstkowe dowolnych funkcji można sprawdzić na `https://www.wolframalpha.com` stosując na przykład polecenie: `differentiate x/y+xsin(y)` – wtedy otrzymamy wszystkie pochodne cząstkowe – lub:
`d/dy x/y+xsin(y)` dla otrzymania pochodnej cząstkowej względem wybranej zmiennej (w tym wypadku: y).

Pochodne cząstkowe interpretujemy geometrycznie jako tangens kąta nachylenia odpowiednich stycznych do wykresu.

Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych

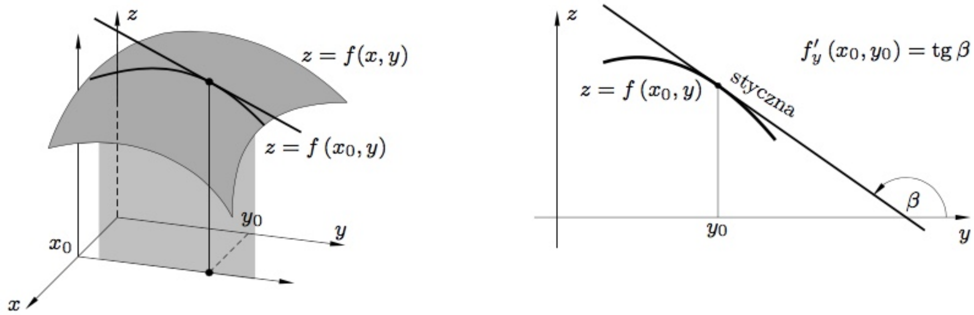
Niech funkcja $z = f(x,y)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Ponadto niech α oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $y = y_0$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, do płaszczyzny xOy oraz niech β oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $x = x_0$. Wtedy

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha, \quad f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta.$$



Rys. 4.1. Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $f'_x(x_0, y_0)$

Pochodna cząstkowa $f'_x(x_0, y_0)$ jest miarą lokalnej szybkości wzrostu funkcji f względem zmiennej x przy ustalonej wartości zmiennej y. Podobnie jest dla pochodnej cząstkowej $f'_y(x_0, y_0)$.



Rys. 4.2. Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $f'_y(x_0, y_0)$

Korzystając z powyższej interpretacji można napisać równania obu stycznych, a następnie płaszczyzny wyznaczonej przez te styczne. Jest to **płaszczyzna styczna** do wykresu $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0). Jej równanie jest następujące:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_x(x_0, y_0)(y - y_0)$$

PRZYKŁAD. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do elipsoidy o równaniu $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 31$ w punkcie $(3, 2, -1)$.

Powierzchnię tą można rozłożyć na dwie części o równaniach $z = \pm\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}$. Punkt $(3, 2, -1)$ spełnia równanie z minusem. Liczymy więc pochodne cząstkowe dla funkcji $f(x, y) = -\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}$

$$f'_x = \frac{-1}{2\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}} \cdot (-4x) = \frac{2x}{\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}},$$

$$f'_y = \frac{-1}{2\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}} \cdot (-6y) = \frac{3y}{\sqrt{31 - 2x^2 - 3y^2}}.$$

Stąd $f'_x(3, 2) = 6$ oraz $f'_y(3, 2) = 6$. Po wstawieniu do równania płaszczyzny stycznej (danego powyżej) otrzymujemy:

$z - (-1) = 6(x - 3) + 6(y - 2)$, czyli $z = 6x + 6y - 29$.

Różniczka i jej zastosowanie do obliczeń przybliżonych.

Pochodne cząstkowe mają też zastosowanie do obliczeń przybliżonych. Można wykazać, że zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Wyrażenie po prawej stronie nosi nazwę *różniczki* funkcji f w punkcie (x_0, y_0) i jako funkcja dwóch zmiennych Δx i Δy oznaczana bywa symbolem $df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$.

Odmianą tej przybliżonej równości jest *metoda szacowania błędu obliczeń* przy błędach pomiaru. Jeśli wielkości fizyczne x, y, z związane są zależnością $z = f(x, y)$

(gdzie funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe) i jeśli $\Delta x, \Delta y$ oznaczają błędy bezwzględne pomiaru wielkości x i y, to błąd bezwzględny Δz obliczeń wielkości z wyraża się wzorem przybliżonym

$$\Delta z \approx |f'_x(x_0, y_0)|\Delta x + |f'_y(x_0, y_0)|\Delta y.$$

Przykład Obliczyć wartość $(1.03)^4 \cdot (0.98)^2$.

Stosujemy pierwszy wzór dla obliczenia wartości $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ przyjmując $f(x, y) = x^4y^2$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$, $x_0 = y_0 = 1$. Obliczamy pochodne cząstkowe $f'_x(x, y) = 4x^3y^2$ i $f'_y(x, y) = 2x^4y$. A zatem, podstawiając do wzoru mamy

$$f(1+0.03, 1-0.02) \approx f(1, 1)+f'_x(1, 1)\cdot 0.03 - f'_y(x_0, y_0)\cdot 0.02 = 1+4\cdot 0.03-2\cdot 0.02 = 1 + 0.12 - 0.04 = 1.08.$$

Rzeczywista wartość wynosi $(1.03)^4 \cdot (0.98)^2 \approx 1.0809\ldots$

Pochodna kierunkowa.

Mając punkt na danej powierzchni można rozpatrywać styczne w różnych kierunkach. Nachylenie tych stycznych mierzy tempo wzrostu funkcji dwóch zmiennych w różnych kierunkach.

Pochodna kierunkowa

Definicja. Dla danej funkcji $f(x, y)$ dwóch zmiennych, punktu (x_0, y_0), oraz wersora $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ następującą granicę

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}$$

nazywamy *pochodną kierunkową* funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$.

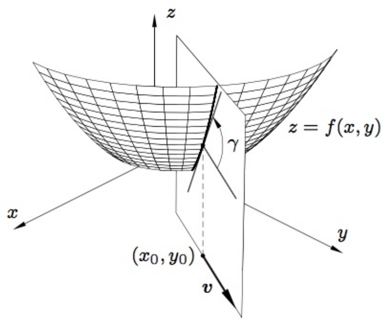
Uwaga. Tradycyjne oznacza się ją też $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0, y_0)$. Mierzy ona tempo zmian funkcji w danym kierunku. (Podobnie definiujemy pochodną kierunkową funkcji 3 lub więcej zmiennych). Interpretacją geometryczną jest kąt nachylenia odpowiedniej stycznej (jak opisane w podręczniku GS):

Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej

Niech γ oznacza kąt nachylenia do płaszczyzny xOy półstycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f półpłaszczyzną przechodzącą przez prostą $x = x_0,\ y = y_0$ oraz równoległą do wersora $\boldsymbol{v}$. Wtedy

$$f'_v(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \gamma.$$

Pochodna kierunkowa określa szybkość zmiany wartości funkcji f w kierunku $\boldsymbol{v}$.



Rys. 7.1. Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej funkcji

Uwaga. Zwróćmy uwagę, że przy pochodnej kierunkowej bierzemy granicę **jednostronną**: patrzymy na styczną z jednej strony dochodzącą do (x_0, y_0). Gdy jako $\boldsymbol{v}$ weźmiemy wektor $\boldsymbol{v} = (1, 0)$, to otrzymamy jednostronną pochodną cząstkową f'_x, a dla $\boldsymbol{v} = (0, 1)$ jednostronną pochodną cząstkową f'_y.

Przykład 1. Obliczmy (z definicji) pochodną kierunkową dla funkcji $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 8y^3}$ w punkcie $(0, 0)$ w kierunku wektora $(1, 1)$, któremu odpowiada wersor $\boldsymbol{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}t^2 + 2\sqrt{2}t^3}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}t} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Zauważmy, że pochodna kierunkowa w kierunku przeciwnym $(-1, -1)$ jest w tym przypadku taka sama. A więc istnieje obustronna styczna do wykresu w tym kierunku w punkcie $(0, 0)$.

Wykład 5

Gradient i pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Definicja. *Gradientem* funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor określony wzorem:

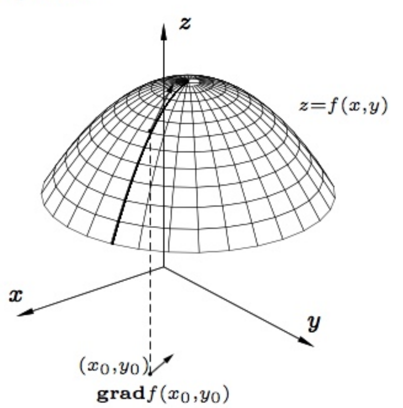
$$\mathbf{grad}\, f\,(x_0, y_0) = \Big(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\Big)\,.$$

Na oznaczenie gradientu używany jest też symbol ∇f. Można uzasadnić następującą interpretację geometryczną gradientu:

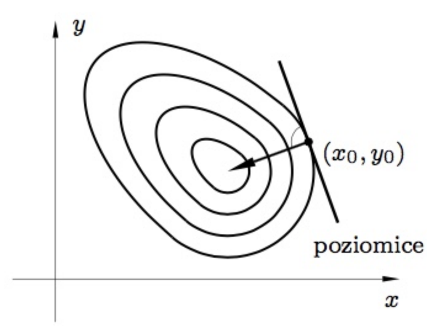
Interpretacja geometryczna gradientu

1. Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie.

2. Gradient funkcji w punkcie jest prostopadły do poziomicy funkcji przechodzącej przez ten punkt.



Rys. 7.2. Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji



Rys. 7.3. Gradient funkcji jest prostopadły do poziomicy

W tym kursie ograniczamy się tylko do jednego zastosowania gradientu do obliczania pochodnych kierunkowych.

Twierdzenie. *Jeśli pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y)$ są* ***ciągłe*** *w punkcie (x_0, y_0), to pochodna kierunkowa $f'_{\boldsymbol{v}}$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ wyraża się wzorem:*

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad}\, f\,(x_0, y_0) \circ \boldsymbol{v},$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny wektorów. (Analogiczny wzór zachodzi dla funkcji 3 zmiennych).

Przykład 2. Obliczmy pochodną kierunkową dla funkcji $f(x, y) = (x + 2y)^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (2, 1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Wyznaczamy najpierw gradient jako parę pochodnych cząstkowych, czyli:

grad $f = (2x+4y, 4x+8y)$. Zgodnie ze wzorem z twierdzenia

$$f'_{\boldsymbol{v}}(2,1) = \mathbf{grad}\, f\,(2,1) \circ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = (8,16) \circ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 4 - 8\sqrt{3},$$

Dla sprawdzenie, obliczmy tę samą pochodną wprost z definicji:

$$f'_{\boldsymbol{v}}(2,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(2+\frac{1}{2}t, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}t) - f(2,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(2+\frac{1}{2}t + 2(1-\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)^2 - 16}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(4+(\frac{1}{2}-\sqrt{3})t)^2}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{8(\frac{1}{2}-\sqrt{3})t + (\frac{1}{2}-\sqrt{3})t^2}{t} = 4 - 8\sqrt{3}.$$

Przykład 3. Spróbujmy obliczyć pochodną z Przykładu 1 przy pomocy gradientu. Najpierw liczymy parę pochodnych cząstkowych:

$$\mathbf{grad}\, f = \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+8y^3)^2}}, \frac{24y^2}{3\sqrt[3]{(x^2+8y^3)^2}} \right).$$

Teraz próbujemy podstawić $(x,y) = (0,0)$ i stwierdzamy, że w tym punkcie pochodne są nieokreślone. Zatem nie jest spełniony warunek z twierdzenia, że pochodne cząstkowe są ciągłe w rozważanym punkcie, a zatem tą metodą pochodnej kierunkowej nie da się obliczyć. (Ale nie znaczy to, że pochodna kierunkowa nie istnieje. Została ona obliczona wprost z definicji w Przykładzie 1.)

Pochodne wyższych rzędów

Różniczkując wielokrotnie funkcję dwóch zmiennych otrzymujemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

Definicja. Pochodne cząstkowe *drugiego rzędu* funkcji $f(x,y)$ określone są wzorami:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y, \quad f''_{yx} = (f'_y)'_x, \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y,$$

w zapisie tradycyjnym

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Uwaga. Oczywiście pochodne te rozważamy tylko tam gdzie są określone. Zwróćmy uwagę na różną kolejność literek x, y w obu zapisach. Wynika to stąd, że w pierwszym zapisie symbole różniczkowania zapisujemy po prawej stronie różniczkowanego wyrażenia, a w drugim po lewej (zob. Przykład 4 poniżej).

Niektórzy autorzy (jak. np. w skrypcie Gewerta i Skoczylasa!) stosują tu odwrotną konwencję zapisu ($f''_{xy} = (f'_y)'_x$) i można się spierać, która konwencja jest lepsza. Jednak nie ma to większego znaczenia, bo jak pokazuje następne twierdzenie kolejność różniczkowania zazwyczaj nie gra roli.

Twierdzenie (Schwarza o pochodnych mieszanych). *Jeśli pochodne f''_{xy}, f''_{yx} są ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to są w nim równe, tj. $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Analogicznie definiujemy pochodne wyższych rzędów. Na przykład, $f'''_{xxy} = (f''_{xx})'_y$, $f''''_{xxyx} = (f'''_{xxy})'_x$, itd., oraz pochodne wyższych rzędów dla funkcji trzech i więcej zmiennych. Zachodzi uogólnienie twierdzenia Schwarza: jeśli wszystkie pochodne są ciągłe w pewnym obszarze, to kolejność różniczkowania względem różnych zmiennych nie ma znaczenia.

Przykład 4. Obliczymy pochodną $f'''_{xxz}(x, y, z)$ dla funkcji $f(x, y, z) = x^3z + y^2z^2 + 2xy$.

$$(x^3z + y^2z^2 + 2xy)'''_{xxz} = ((x^3z + y^2z^2 + 2xy)'_x)''_{xz} =$$

$$= (3x^2z + 2y)''_{xz} = (6xz)'_z = 6x.$$

W zapisie tradycyjnym

$$\frac{\partial^3}{\partial z \partial x \partial x}\left(x^3z + y^2z^2 + 2xy\right) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3z + y^2z^2 + 2xy\right)\right) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(3x^2z + 2y\right) = \frac{\partial}{\partial z}(6xz) = 6x.$$

Widać że konwencja zapisu kolejności zmiennych, którą przyjęliśmy zgodna jest w obu przypadkach z naturalną kolejnością działań, odpowiednio, wykonywanych z prawej lub lewej strony.

Różniczkowanie funkcji złożonych

Jeśli funkcja jednej zmiennej dana jest w sposób złożony $F(x) = g(f(x))$, to wiemy, że $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, i wzór ten jest bardzo przydatny w praktycznych obliczeniach.

Analogiczne wzory istnieją dla funkcji złożonych z udziałem funkcji $f(x,y)$ dwóch zmiennych: $F(t) = f(x(t), y(t))$ lub $\Phi(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, ale ich zastosowanie jest znacznie bardziej ograniczone (i nie ma tego w planie ćwiczeń). Odnotujmy więc tylko informacyjnie odnośne wzory:

$$F'_t = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t,$$

oraz

$$\Phi'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x, \qquad \Phi'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y.$$

Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Bardzo wiele zadań z zakresu fizyki czy mechaniki polega na wyznaczeniu największej wartości funkcji dwóch lub czasami większej ilości zmiennych. Dlatego ważna jest umiejętność wyznaczania lokalnych ekstremów funkcji.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f(x,y)$ ma *minimum* (lub *maksimum*) lokalne w punkcie (x_0, y_0), jeśli dla każdego punktu (x,y) w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) zachodzi $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ (lub odpowiednio $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$).

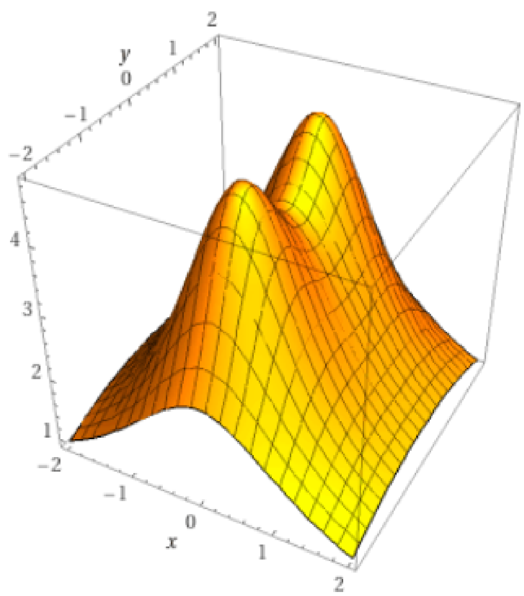
Jeśli ta nierówność jest ostra wszędzie poza punktem (x_0, y_0), to minimum (maksimum) nazywamy *właściwym*. Minima i maksima obejmujemy wspólną nazwą: *ekstrema lokalne*.

Przykład 1. (Na wcześniejszych rysunkach): Parabolida $z = x^2 + y^2$ ma minimum właściwe równe 0 w punkcie $(0,0)$. Górna półsfera $z = \sqrt{R - (x^2 + y^2)}$ ma maksimum właściwe równe R w punkcie $(0,0)$. Powierzchnia siodłowa $z = x^2 - y^2$ nie ma ekstremum lokalnego w żadnym punkcie (jeśli chodzi o punkt $(0,0)$ to w każdym jego otoczeniu funkcja $z = x^2 - y^2$ przyjmuje zarówno wartości ujemne jak i dodatnie). Powierzchnia walcowa $z = -y^2$ ma maksima niewłaściwe we wszystkich punktach $y = 0$.

Przykład 2. Jeśli funkcja jednej zmiennej $y = f(x)$ określona na całej osi $\mathbb{R}$ ma dwa maksima lokalne, to musi też mieć między nimi minimum lokalne. Inaczej jest w przypadku funkcji dwóch zmiennych. Na przykład, funkcja

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + (y-1)^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + (y+1)^2 + 1}$$

ma dwa maksima lokalne i żadnych minimów.



*wykres z portalu `https://www.wolframalpha.com`,
polecenie: `plot 1/(x^2+(y-1)^2+1)+1/(x^2+(y+1)^2+1)`

Warunek konieczny istnienia extremum

Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ ma maksimum w punkcie (x_0, y_0) i jest w tym punkcie gładka (ma pochodne cząstkowe). Wtedy płaszczyzna styczna do wykresu w tym punkcie jest równoległa do płaszczyzny $z = 0$. A to oznacza, że kąt nachylenia stycznych (do płaszczyzny $z = 0$) wynosi 0. Dlatego (z równania płaszczyzny stycznej) zachodzi :

TWIERDZENIE *Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0) i ma w tym punkcie extremum lokalne to* $f'_x(x_0, y_0) = 0$ *oraz* $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Uwaga. To że pochodne są równe zero nie znaczy jeszcze, że w punkcie jest ekstremum (nie jest to warunek wystarczający). Na przykład, powierzchnia siodłowa $f(x, y) = x^2 - y^2$ ma pochodne $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, a więc $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, ale w punkcie $(0, 0)$ nie ma ekstremum.

Warunek wystarczający istnienia extremum

Punkty spełniające $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ nazywamy *punktami stacjonarnymi*. Takie punkty są „podejrzane" o istnienie ekstremum. żeby sprawdzić, czy jest w nich ekstremum, i jeśli tak, to jakie, stosujemy wyznacznik zwany *hessianem*:

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} (x_0, y_0) =$$

$= f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0) f''_{yx}(x_0, y_0).$

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i spełnia w nim warunek $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, to w punkcie tym zachodzą następujące implikacje:*

1. Jeśli $H(x_0, y_0) > 0$ i $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, to w punkcie (x_0, y_0) jest **minimum właściwe**,
2. Jeśli $H(x_0, y_0) > 0$ i $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie (x_0, y_0) jest **maksimum właściwe**,
3. Jeśli $H(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie (x_0, y_0) **nie ma ekstremum**,

Uwaga. Jeśli $H(x_0, y_0) = 0$, to ekstremum w punkcie (x_0, y_0) może istnieć lub nie. W takim przypadku, można to sprawdzić stosując bezpośrednio definicję. (Jako przykłady mogą tu służyć funkcje $z = x^3 + y^3$ oraz $z = x^4 + y^4$; Naszkicuj!). Ekstrema mogą być ponadto w punktach w których $f(x, y)$ nie ma określonej pochodnej cząstkowej.

Algorytm znajdowania ekstremów lokalnych jest więc następujący:

(1) Wyznaczyć dziedzinę funkcji – naturalną, jeśli taka nie jest określona wprost;

(2) wyznaczyć punkty, w których może wystąpić extremum (stacjonarne i te w których nie ma pochodnych)

(3) sprawdzić hessianem lub bezpośrednio, czy i jakie ekstremum jest w danym punkcie.

PRZYKŁAD 1. Przekonajmy się obliczeniami, że powierzchnia $z = x^2 - y^2$ nie ma ekstremów lokalnych.

(1) Funkcja ta jest określona dla wszystkich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i

(2) ma w każdym punkcie pochodne cząstkowe określone wzorami

$f'_x = 2x;$

$f'_y = -2y;$

Jedynym punktem podejrzanym (w którym może być ekstremum) jest punkt $(0, 0)$, w którym obie pochodne są równe 0.

(3) Sprawdzamy hesjan: $H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4.$

Ponieważ jest on ujemny, w punkcie tym nie ma ekstremum. A zatem funkcja $z = x^2 - y^2$ nie ma ekstremów lokalnych.

Przykład 2. Znajdźmy ekstrema funkcji $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(1) Dziedziną jest całe $\mathbb{R}^2$.

(2) Pochodne cząstkowe dane są wzorami:

$$f'_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

i są określone wszędzie poza punktem $(0, 0)$. Można sprawdzić z definicji, że w punkcie $(0, 0)$ nie ma pochodnych cząstkowych, ale nie trzeba tego robić i można przyjąć że jest to jedyny punkt podejrzany (w którym może być ewentualnie ekstremum). Łatwo zauważyć, że $f(0, 0) = 0$, podczas gdy w każdym innym punkcie $f(x, y) > 0$. A zatem w punkcie tym, faktycznie, mamy minimum lokalne.

Inne bardziej złożone przykłady można znaleźć w skrypcie Gewert-Skoczylas

Ekstrema warunkowe. Zarówno pewne naturalne zagadnienia jak i wymogi znajdowania ekstremów globalnych prowadzą do następującego zagadnienia:

Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $z = f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$.

Oznacza to, że interesują nas takie punkty (x_0, y_0) dla których $g(x_0, y_0) = 0$, a jednocześnie w pewnym otoczeniu (x_0, y_0), **ograniczonym** do punktów spełniających $g(x, y) = 0$,

zachodzi $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ — wtedy mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma *minimum warunkowe lokalne przy warunku* $g(x, y) = 0$, lub

zachodzi $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ – wtedy mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma *maksimum warunkowe lokalne przy warunku* $g(x, y) = 0$).

Jeśli ta nierówność jest ostra poza punktem (x_0, y_0), to minimum (maksimum) nazywamy *właściwym*.

Na zagadnienie to można popatrzeć też w ten sposób, że szukamy ekstremów funkcji $z = f(x, y)$ na krzywej $g(x, y) = 0$.

Problem ten generalnie sprowadza się do znalezienia ekstremów funkcji jednej zmiennej:

W przypadku, gdy warunek $g(x,y)=0$ da się rozwiązać względem y, czyli można go przekształcić do warunku w postaci $y=h(x)$, po podstawieniu otrzymujemy $z=f(h(x),x)$ i wystarczy znaleźć ekstrema lokalne tej funkcji jednej zmiennej x. Podobnie jest gdy, $g(x,y)=0$ można przekształcić do warunku $x=h(y)$ (wtedy mamy funkcję jednej zmiennej y).

Nieco większy problem mamy, gdy $g(x,y)=0$ nie daje się jednoznacznie rozwiązać względem żadnej ze zmiennych. Wtedy musimy rozważyć dwa lub więcej przypadków, dla których takie rozwiązanie jest możliwe i porównać otrzymane wyniki (tu trzeba też sprawdzić punkty graniczne danego przypadku). Najlepiej to widać na przykładzie.

Przykład. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji
$z=x^4+y^2$ przy warunku $x^2+y^2=1$.

Równanie okręgu $x^2+y^2=1$ nie da się jednoznacznie rozwiązać względem żadnej zmiennej, więc musimy wyróżnić dwa przypadki:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$ dla $-1\leqslant x\leqslant 1$, oraz
(2) $y=-\sqrt{1-x^2}$ dla $-1\leqslant x\leqslant 1$.

W pierwszym przypadku, podstawiając $y=\sqrt{1-x^2}$ w równaniu $z=x^4+y^2$, otrzymujemy

$z=x^4-x^2+1$ dla $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Obliczając pochodną i przyrównując do zera mamy

$z'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=0$, czyli $x=0$ lub $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sprawdzamy, że w pierwszym punkcie jest maksimum $z=1$, a w pozostałych dwóch minimum $z=\frac{3}{4}$. Musimy jeszcze sprawdzić wartość **w punktach brzegowych** $x=\pm 1$; wynosi ona w obu punktach $z=1$. Drugi przypadek daje identyczne wyniki. Zatem w punktach brzegowych też mamy maksima.

Podsumowując, maksima warunkowe (dla funkcji
$z=x^4+y^2$ na okręgu $x^2+y^2=1$) mamy w punktach $(\pm 1,0)$ i $(0,\pm 1)$, a minima warunkowe w punktach $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{3}{4}\right)$.

Wykład 6

Największa i najmniejsza wartość funkcji dwóch zmiennych

Główne zastosowanie metod omówionych na poprzednim wykładzie to rozwiązywanie tzw. *zagadnień optymalizacyjnych.* Sprowadzają się one do wyznaczania największej (lub najmniejszej) wartości funkcji w danym zbiorze. Takie wartości nazywane też bywają *ekstremami globalnymi.*

Ogólnie funkcja dwóch zmiennych nie musi przyjmować ekstremalnych wartości w danym obszarze. Na przykład, funkcja $f(x, y) = \arctan x + \arctan y$ jest ciągła i określona na całej płaszczyźnie oraz ograniczona: $-\pi < f(x, y) < \pi$, ale w żadnym punkcie jej wartość nie jest największa ani najmniejsza. Jednak zachodzi następujące:

TWIERDZENIE (Weierstrassa o istnieniu ekstremów globalnych) *Jeśli funkcja $f(x, y)$ określona jest na zbiorze* ***ograniczonym i domkniętym****, to przyjmuje na nim wartość największą i wartość najmniejszą.*

Wartości te można znaleźć posługując się następującym rozumowaniem. Jeśli wartość największa (najmniejsza) znajduje się **we wnętrzu** obszaru, to jest oczywiście *lokalnym ekstremum.* Jeśli wartość największa (najmniejsza) znajduje się **na brzegu** obszaru, to jest lokalnym ekstremum na tym brzegu, czyli *ekstremum warunkowym.* Metoda jest więc następująca.

Algorytm znajdowania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

1) w obszarze otwartym szukamy punktów, w których może wystąpić ekstremum lokalne;

2) na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja może mieć ekstrema warunkowe;

3) porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach — wśród nich są poszukiwane wartość największa i wartość najmniejsza (które istnieją na mocy Tw. Weierstrassa). Wartości te oznaczamy zwykle f_{max} i f_{min}.

Uwaga. Po znalezieniu ekstremów można dodatkowo próbować ustalić czy jest to maksimum czy minimum; ale zwykle szybciej i prościej jest wyznaczyć wszystkie punkty, w których ekstremum **może** wystąpić (bez sprawdzania czy jest w nich ekstremum i jakie), a następnie porównać ich wartości.

Poniższe trzy przykłady pokazują, na jakie problemy możemy się natknąć i na co należy szczególnie uważać przy stosowaniu tego algorytmu.

Przykład I. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $z = x(y^2 - 1)$ w obszarze $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

1) Szukamy punktów krytycznych w obszarze otwartym. Wyliczamy pochodne cząstkowe

$z'_x = y^2 - 1$ oraz $z'_y = 2xy$. Po przyrównaniu do zera $y^2 - 1 = 0$ oraz $2xy = 0$, otrzymujemy punkty stacjonarne $(0, \pm 1)$.

2) Brzeg obszaru $x^2 + y^2 = 4$ dzielimy na dwa półokręgi $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Podstawiając $y = \sqrt{4 - x^2}$ dla górnego półokręgu do funkcji z otrzymujemy $z = x(3 - x^2) = 3x - x^3$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Stosując metody poszukiwania ekstremów dla funkcji jednej zmiennej, otrzymujemy, że punkty w których może być ekstremum to $x = \pm 1$ oraz punkty skrajne $x = \pm 2$. Takie same wartości dostajemy dla dolnego półokręgu.

3) W rezultacie mamy do sprawdzenia wartości w punktach $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm\sqrt{3})$ oraz $(\pm 2, 0)$. Największa wartość to $z_{max} = 2$ (przyjmowana w trzech punktach na brzegu), najmniejsza wartość to $z_{min} = -2$ (przyjmowana w pozostałych trzech punktach na brzegu). Wewnątrz obszaru funkcja przyjmuje wartości $z < |2|$.

Przykład II. Znaleźć ekstrema globalne funkcji $f(x, y) = y^2 + x^2(1 + y)^3$ w kwadracie $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

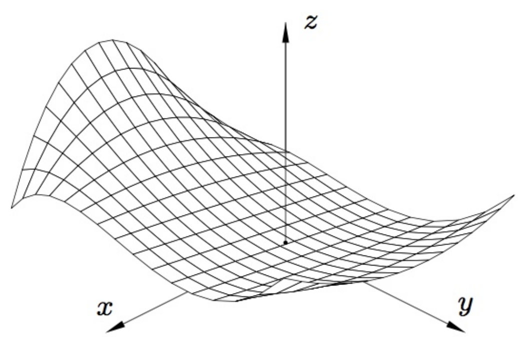
1) szukamy lokalnych ekstremów w obszarze otwartym:

$f'_x = 2x(1 + y)^3$ oraz $f'_y = 2y + 3x^2(1 + y)^2$. Przyrównując do zera $2x(1 + y)^3 = 0$ oraz $2y + 3x^2(1 + y)^2 = 0$ otrzymujemy, z pierwszej równości: $x = 0$ lub $y = -1$, a uwzględniając drugą równość, dostajemy, że jedynym punktem, w którym może być ekstremum, jest punkt $(0, 0)$, który jednak nie należy do wnętrza obszaru (więc go pomijamy).

2) szukamy punktów krytycznych na brzegu kwadratu $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Dla odcinka $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ mamy $f = x^2$. Na tym odcinku x^2 jest rosnąca więc jedyne punkty krytyczne to końce odcinka. Podobnie dla odcinka $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ mamy $f = y^2$ i taką samą konkluzję. Dla odcinka $y = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ mamy $f = 1 + 8x^2$, która również na wskazanym odcinku jest rosnąca, więc znowu jedyne punkty krytyczne to końce odcinka. Wreszcie dla odcinka $x = 1$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ mamy $f = y^3 + 4y^2 + 3y^2 + 1$, która też rośnie na odcinku $0 \leqslant y \leqslant 1$ (jako suma funkcji rosnących), więc znów punktami krytycznymi są tylko końce odcinka.

3) Pozostaje sprawdzić wartości f w punktach odpowiadających końcom odcinków (czyli wierzchołkom kwadratu): $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 1$, $f(1, 0) = 1$ i $f(1, 1) = 9$. A więc $f_{min} = 0$ i $f_{max} = 9$.

Uwaga. Funkcja $f(x, y) = y^2 + x^2(1 + y)^3$ jest ciągła i ma globalnie interesującą własność. Przy pomocy hessiana można sprawdzić, że punkt $(0,0)$ jest minimum lokalnym z wartością $f(0,0)=0$ i jest jedynym ekstremum lokalnym w całej naturalnej dziedzinie $\mathbb{R}^2$. Mimo tego f ma w pewnych punktach wartości ujemne, a nawet więcej: zbiorem wartości f jest cały zbiór $\mathbb{R}$. (Zauważmy, że taka sytuacja nie jest możliwa w przypadku funkcji ciągłej jednej zmiennej!– żeby funkcja była ciągła w $\mathbb{R}$, miała jedno ekstremum, i żeby to nie było ekstremum globalne – A jak to jest możliwe dla funkcji dwóch zmiennych pokazuje poniższy rysunek).



Rys. 1. Wykres funkcji $f(x,y)=y^2+x^2(1+y)^3$

Przykład III. Jakie wymiary powinna mieć blaszana wanna w kształcie prostokąta o pojemności jednego metra sześciennego, tak żeby powierzchnia blachy zużyta na jej zbudowanie była jak najmniejsza?

Oznaczając przez P pole powierzchni bocznej wanny, przez $a,b,h>0$ jej wymiary, mamy

$P=ab+2ah+2bh$ i $1=abh.$

Po wyrugowaniu h mamy

$P=ab+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}.$

Traktując $a,b>0$ jako zmienne, $P=P(a,b)$ jest funkcją dwóch zmiennych i potrzebujemy znaleźć jej najmniejszą wartość w obszarze $a,b>0$. Szukamy najpierw ekstremów lokalnych.

$P'_a=b-\frac{2}{a^2}$ oraz $P'_b=a-\frac{2}{b^2}$. Przyrównując do zera otrzymujemy warunki na punkt stacjonarny

$b=\frac{2}{a^2}$ oraz $a=\frac{2}{b^2}$, co daje $a=b=\sqrt[3]{2}$. Obliczając hessian stwierdzamy, że jest to lokalne minimum.

A zatem, gdy wanna ma wymiary $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times 1/\sqrt[3]{4}$ (w metrach), to boczna powierzchnia wynosi $P = 3\sqrt[3]{4}$ m^2 i **jest minimalna**.

Powstaje jednak pytanie: czy to jest rzeczywiście minimum globalne – najmniejsza wartość dla wszystkich $a, b > 0$? W świetle poprzedniego przykładu nie możemy wykluczyć, że funkcja P przybiera w innych punktach wartości mniejsze niż w lokalnym minimum. Trzeba więc pokazać, że poza odpowiednio dobranym obszarem ograniczonym wartość P jest zawsze większa od $3\sqrt[3]{4}$.

Na przykład, pokażemy, że tak jest poza prostokątem wyznaczonym nierównościami $\frac{1}{3} \leqslant a, b \leqslant 18$. Rzeczywiście, jeśli $a < \frac{1}{3}$, to $P > \frac{2}{a} > 6 > 3\sqrt[3]{4}$. Tak samo, jeśli $b < \frac{1}{3}$. Z kolei, jeśli oba $a, b \geqslant \frac{1}{3}$ i powiedzmy $a > 18$, to $P > ab > 6 > \sqrt[3]{4}$. Podobnie jeśli $b > 18$, co dowodzi tezy: poza rozważanym prostokątem wartość funkcji $P > 3\sqrt[3]{4}$. Powyższe nierówności pokazują też, że na samym brzegu prostokąta $\frac{1}{3} \leqslant a, b \leqslant 18$ wartość $P > 6$, co kończy zadanie.

Inne przykłady rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych można znaleźć w skrypcie Gewert-Skoczylas, str. 113.