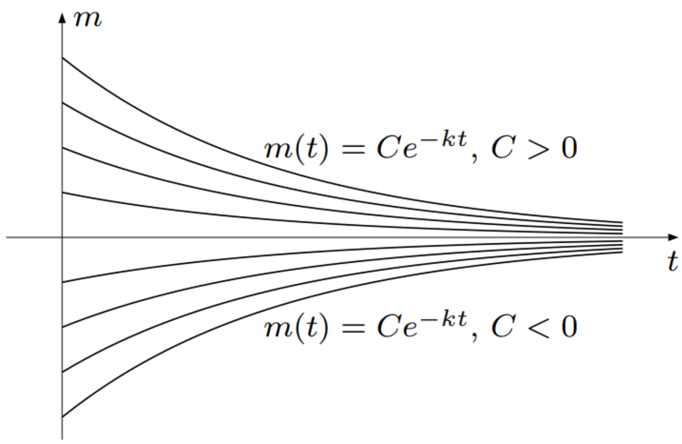
Wykład 9 (cd)

Równania różniczkowe

Przykład 1. Prędkość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego jest ujemna i proporcjonalna do masy substancji, która w danej chwili jeszcze się nie rozpadła. Współczynnik proporcjonalności $k > 0$, będący wielkością charakterystyczną dla danej substancji, jest stały. Wyznaczyć zależność masy pierwiastka od czasu.

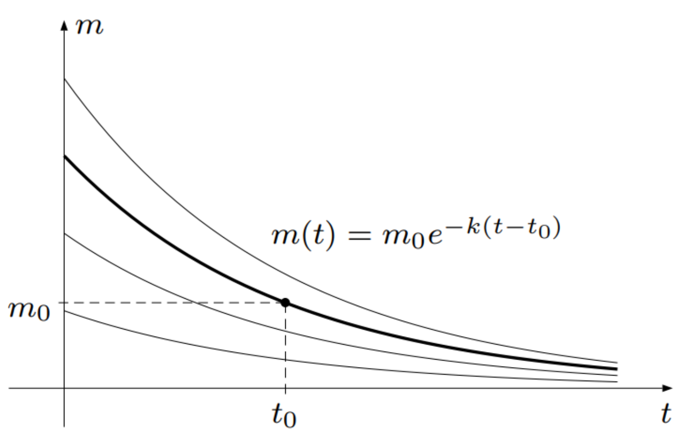
$m'(t) = -km(t)$.

$m(t) = Ce^{-kt}$ spełnia to równanie

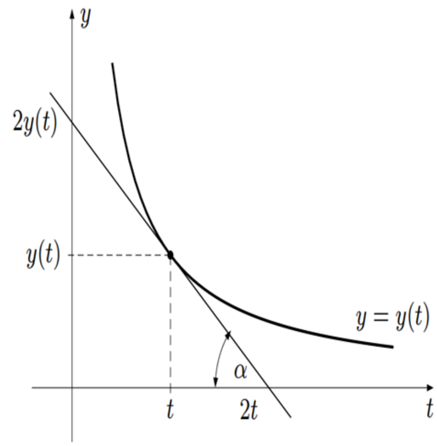


Czy są inne rozwiązania?

warunki początkowe np. $m(t_0) = m_0$



Przykład 2. Czy istnieje krzywa gładka (mająca styczne w każdym punkcie dziedziny), taka że każdy punkt tej krzywej dzieli odcinek stycznej w tym punkcie zawarty między osiami układu współrzędnych na dwie równe części?



$$\frac{2y(t)}{2t} = \operatorname{tg}\alpha$$

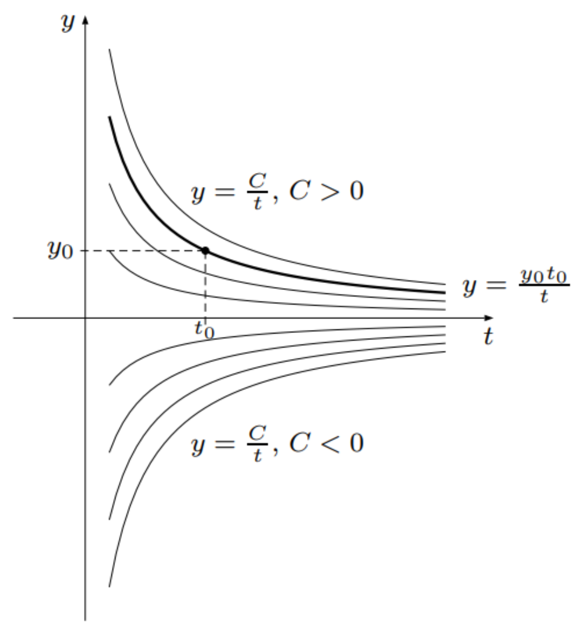
$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = y'(t)$$

$$y = -ty'$$

Zgadujemy rozwiązanie

$$y(t) = \frac{C}{t}$$

rodzina hiperboli



warunki początkowe: $y(t_0) = y_0$

dają: $C = y_0 t_0$ i rozwiązanie:

$$y(t) = \frac{y_0 t_0}{t}.$$

DEF. **Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu** – w postaci normalnej

$$y' = f(t, y).$$

Ogólną forma:

$$F(t, y, y') = 0.$$

Funkcja $y = y(t)$ spełniająca równanie: **rozwiaząnie**

Rozwiązanie w postaci uwikłanej $G(y, t) = 0$ nazywa się też *całką równania różniczkowego*, a samo rozwiązywanie równania – *całkowaniem*

PRZYKŁAD. Całką równania różniczkowego

$$y' = -\frac{y^2}{1 + ty}$$

jest funkcja $y = y(t)$ dana w sposób uwikłany równaniem $ye^{ty} = C$
(dla dowolnej stałej C); Sprawdzić.

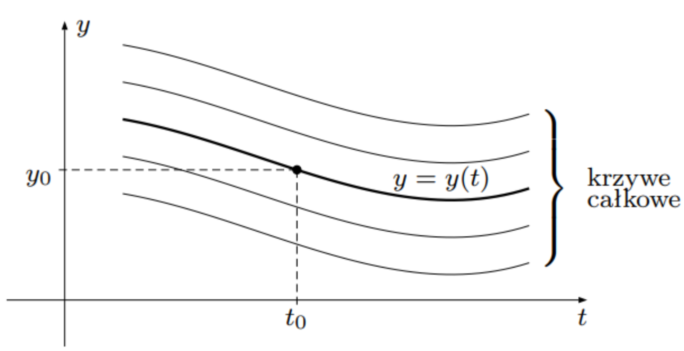
Na ogół: cała rodzina rozwiązań (zawierająca dowolną stałą C)

DEF. Równanie różniczkowe z *warunkiem początkowym*:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

nazywamy **zagadnieniem początkowym** (lub *zagadnieniem Cauchy'ego*).

Rozwiązanie: na ogół jedna konkretna funkcja: krzywa całkowa przechodząca przez punkt (t_0, y_0).

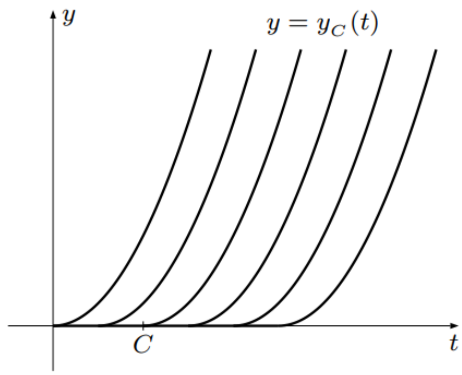


Przykład.

Zgadnienie początkowe może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Dla przykładu zagadnienie $y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że $y(t) \equiv 0$ jest jego rozwiązaniem. Ponadto rozwiązaniami są funkcje określone wzorem

$$y_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant C, \\ (t-C)^2 & \text{dla} \quad t > C, \end{cases}$$

gdzie $C \geqslant 0$ (rys.).



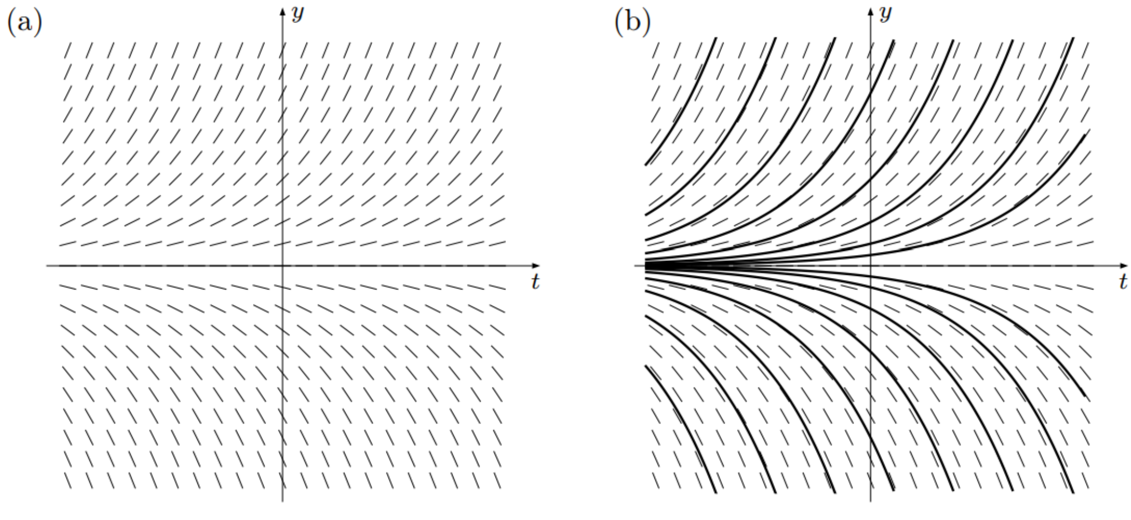
Twierdzenie (*o istnieniu i jednoznacznaczności rozwiązań r.r.*)
Jeżeli funkcja $f(t,y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $f'_y(t,y)$ są ciągłe na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$, to dla każdego punktu $(t_0, y_0) \in D$ zagadnienie początkowe

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

Interpretacja geometryczna: $y' = f(t,y)$ oznacza, że w konkretnym punkcie (t_0, y_0) tangens kata nachylenia stycznej do krzywej całkowej wynosi $\operatorname{tg} \alpha = f(t_0, y_0)$.

Bardzo małe odcinki tych stycznych w różnych punktach (t_0, y_0) wyznaczają kierunki stycznych.



Rys. (a) Pole kierunków, (b) krzywe całkowe

Wykład 10

Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$y' = g(t)h(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt \qquad\qquad \text{rozdzielone zmienne}$$

rozwiązanie $$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt$$

(Sprawdzić).

Przykłady: $\dfrac{dy}{dt} = 2y(t+1),\;\; y' = -\dfrac{t}{y},\;\; y' = \sqrt{1-y^2};$

Równania różniczkowe liniowe

$$y' + p(t)y = q(t)$$

dla $q(x) \equiv 0$ – równanie liniowe **jednorodne**.

Dwie metody rozwiązywania takich równań

Równanie liniowe jednorodne jest równaniem o rozdzielonych zmiennych

$$\frac{dy}{y} = -p(t)dt$$

Metoda I (**uzmienniania stałej**)

1. Rozwiązać najpierw równanie liniowe jednorodne (rozdzielając zmienne)

2. Poszukać rozwiązania ogólnego równania w tej samej postaci wstawiając za stałą C funkcję $c(t)$.

Przykład. $y' = \frac{3y}{t} + t$

1. Rozwiązaniem jednorodnego $y' - \frac{3y}{t} = 0$ jest rodzina $y = Ct^3$

2. Szukamy rozwiązania ogólnego w postaci $y = c(t)t^3$, wstawiając do wyjściowego równania:

$$(c(t)t^3)' = 3c(t)t^2 + t$$

czyli

$$c'(t)t^3 = t.$$

Stąd wyliczamy $c(t) = -t^{-1} + C_1$ i ogólny wynik $y = -t^2 + C_1 t^3$ (Sprawdzić szczegóły).

Można wykazać, że ta metoda zawsze działa (prowadzi do równania o rozdzielonych zmiennych z $c(t)$).

Metoda II (**czynnika całkującego**)

Mnożymy całe równanie przez funkcję $f(t)$

$$f(t)y' + f(t)p(t)y = f(t)q(t)$$

tak żeby lewa strona okazała się pochodną iloczynu funkcji.

Można wykazać, że istniej taka funkcja postaci $f(t) = e^{c(t)}$

$$y'e^{c(t)} + e^{c(t)}p(t)y = e^{c(t)}q(t)$$

dająca

$$(ye^{c(t)})' = e^{c(t)}q(t)$$

Wtedy musi być $c'(t) = p(t)$.

Przykład. $y' - \frac{3y}{t} = t$

1. Szukamy czynnika całkującego w postaci $e^{c(t)}$ gdzie $c'(t) = -\frac{3}{t}$.

Rozwiązując ostatnie równanie, mamy $c(t) = -3\ln t$ (wystarczy wybrać jedno rozwiązanie), co daje czynnik całkujący: $e^{-3\ln t} = t^{-3}$.

po pomnożeniu całego równania przez ten czynnik mamy

$$y't^{-3} - 3yt^{-4} = t^{-2}$$

co po zwinięciu lewej strony (zgodnie z metodą) daje

$$(y't^{-3})' = t^{-2},$$

a więc

$$yt^{-3} = -t^{-1} + C,$$

i ostatecznie

$$y = -t^2 + Ct^3.$$

Przykład. $ty' + t^2 + ty = y$ (Odp. $y = Cte^{-t} - t$).

Poprzednie przykłady (szczegóły):

Przykład 1

$\frac{dy}{dt} = 2y(t+1)$

$\frac{dy}{y} = 2(t+1)dt$ lub $y \equiv 0$,

$\int \frac{dy}{y} = \int 2(t+1)dt$

$\ln|y| = t^2 + 2t + C$

$|y| = e^{t^2+2t}e^C$

$y = \pm e^C e^{t^2+2t}$

$y = C_1 e^{t^2+2t}$ (w tym $C_1 = 0$)

Przykład 2

$$y' = -\frac{t}{y}$$

$$ydy = -tdt$$

$$\int ydy = -\int tdt$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{t^2}{2} = C$$

$$y^2 + t^2 = C_1$$

$$y = \pm\sqrt{C - t^2}$$

Przykład 3

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dt \qquad \text{lub} \quad y \equiv \pm 1$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dt$$

$$\arcsin y = t + C$$

$$y = \sin(t + C) \qquad \text{lub} \quad y \equiv 1 \quad \text{lub} \quad y \equiv -1$$

Wykład 11

Transformata Laplace'a

Dla funkcji f określonej na $[0,\infty)$ oraz $s \in \mathbb{R}$ definiujemy:

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Funkcję tak zdefiniowaną (w punktach s dla których całka jest zbieżna) oznaczamy także $\mathcal{L}\{f(t)\}$ (*operator Laplace'a*).

PRZYKŁAD. $\mathcal{L}\{\sin \alpha t\} = \int\limits_0^\infty \sin(\alpha t)\, e^{-st}dt = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ (na następnej stronie)

TWIERDZENIE (*warunki wystarczające dla istnienia transformaty*).

Jeśli funkcja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

(a) ma co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości w każdym przedziale $[0,T]$,

(b) $|f(t)| \leqslant Me^{Ct}$ dla pewnych $M, C > 0$,

to transformata $F(s)$ jest określona dla każdego $s > C$.

(Uzasadnić)

Transformaty wybranych funkcji

Funkcja (oryginał)	Transformata (obraz)
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$e^{\alpha t}\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos \beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

Przykład. $\mathcal{L}\{\sin \alpha t\} = F(s) = \int\limits_0^\infty \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt$

$$\int \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\alpha t) & v' = e^{-st} \\ u' = \alpha \cos(\alpha t) & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{s} \sin(\alpha t)\ e^{-st} + \frac{\alpha}{s} \int \cos(\alpha t)\ e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\alpha t) & v' = e^{-st} \\ u' = -\alpha \sin(\alpha t) & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{s} \sin(\alpha t)\ e^{-st} + \frac{\alpha}{s} \left(-\frac{1}{s} \cos(\alpha t)\ e^{-st} - \frac{\alpha}{s} \int \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{s} \sin(\alpha t)\ e^{-st} - \frac{\alpha}{s^2} \cos(\alpha t)\ e^{-st} - \frac{\alpha^2}{s^2} \int \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{s^2 + \alpha^2}{s^2} \int \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \sin(\alpha t)\ e^{-st} - \frac{\alpha}{s^2} \cos(\alpha t)\ e^{-st},$$

$$\int \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt = -\frac{s^2}{s^2 + \alpha^2}\ e^{-st} \left(\frac{1}{s} \sin(\alpha t) + \frac{\alpha}{s^2} \cos(\alpha t) \right)$$

$$\int \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2 + \alpha^2}\ e^{-st} \left(s \sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t) \right)$$

stąd

$$\int\limits_0^\infty \sin(\alpha t)\ e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2 + \alpha^2}\ \Big[e^{-st} (s \sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t)) \Big]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s^2 + \alpha^2} \Big[0 - 1 \cdot \alpha \Big]_0^\infty \quad = \quad \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}.$$

Twierdzenie (*różnowartościowość transformacji Laplace'a*).
Jeśli funkcje ciągłe $f(t)$ i $g(t)$ mają takie same transformaty, to są równe.

(Uzasadnić).

Własności transformaty

- (liniowość) $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
- (zmiana skali) $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$
- (różniczkowanie obrazu) $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
- (przesunięcie w obrazie) $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t))\} = F(s-\alpha)$

(Uzasadnić)

Znajdowanie oryginałów Przykład: $F(s) = \dfrac{5}{s^2-1}$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Transformaty pochodnych:

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$,

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$,

$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \ldots - s^0 f^{(n-1)}(0^+)$,

Przykłady:

1) $y' - y = t,\ y(0) = 0$

2) $y'' + y = t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

3) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x'(t) = -y \\ y'(t) = -x \end{cases}$$

z warunkami początkowymi: $x(0) = 2,\ y(0) = 0$.

b) Niech $y(t)$ oznacza rozwiązanie naszego zagadnienia początkowego. Wtedy

$$y'(t) - y(t) = t, \quad y(0) = 0.$$

Transformując obustronnie powyższą równość otrzymamy

$$\mathcal{L}\left\{y'(t) - y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\right\}.$$

Stąd, wobec liniowości przekształcenia Laplace'a, mamy

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\right\}.$$

Korzystając teraz ze wzoru na transformatę pochodnej oraz przyjmując, że $Y(s)$ oznacza transformatę rozwiązania $y(t)$ otrzymamy równanie operatorowe postaci

$$sY(s) - y\left(0^+\right) - Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Ponieważ $y\left(0^+\right) = y(0) = 0$, więc

$$(s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \text{czyli } Y(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}.$$

Stąd, po rozkładzie prawej strony na ułamki proste, otrzymamy

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}.$$

Korzystając teraz z tablic transformat Laplace'a mamy

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\left\{e^t\right\} - \mathcal{L}\left\{1\right\} - \mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \mathcal{L}\left\{e^t - 1 - t^2\right\}.$$

Zatem rozwiązanie zagadnienia początkowego dane jest wzorem

$$y(t) = e^t - 1 - t^2.$$

d) Niech $y(t)$ oznacza rozwiązanie rozważanego zagadnienia początkowego. Wtedy

$$y''(t) + y(t) = t.$$

Transformując obustronnie powyższą równość otrzymamy

$$\mathcal{L}\left\{y''(t) + y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\right\}.$$

Korzystając z liniowości przekształcenia Laplace'a dostaniemy

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\right\}.$$

Przyjmując oznaczenie $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ oraz korzystając ze wzorów na transformatę drugiej pochodnej mamy

$$s^2 Y(s) - sy\left(0^+\right) - y'\left(0^+\right) + Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Wykorzystując zadane warunki początkowe otrzymamy

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Ponieważ $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\left\{t\right\}$, więc szukane rozwiązane dane jest wzorem $y(t) = t$.

Przykład 14.5

Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

a) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}, \quad x(0) = 2, \; y(0) = 0;$

b) $\begin{cases} x' = -x + y + e^t \\ y' = x - y + e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1, \; y(0) = 1;$

c) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}, \quad x(0) = 1, \; y(0) = 0, \; z(0) = 1.$

Rozwiązanie

a) Niech $(x(t), y(t))$ będzie rozwiązaniem rozważanego zagadnienia początkowego Wtedy

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}.$$

Transformując obie strony powyższych równości otrzymamy

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-y(t)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-x(t)\right\} \end{cases}.$$

Przyjmując oznaczenia $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, korzystając z liniowości przekształcenia Laplace'a oraz ze wzoru na transformatę pierwszej pochodnej, możemy powyższy układ zapisać w postaci

$$\begin{cases} sX(s) - x\left(0^+\right) = -Y(s) \\ sY(s) - y\left(0^+\right) = -X(s) \end{cases}.$$

Uwzględniając zadane warunki początkowe mamy

$$\begin{cases} sX(s) + Y(s) = 2 \\ X(s) + sY(s) = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązując ten układ równań względem transformat $X(s)$, $Y(s)$ dostaniemy

$$X(s) = \frac{2s}{1-s^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}, \quad Y(s) = \frac{-2}{s^2-1} = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1}.$$

Ponieważ $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} = \dfrac{1}{s+1}$ i $\mathcal{L}\left\{e^{t}\right\} = \dfrac{1}{s-1}$, więc

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{e^{t} + e^{-t}\right\}, \quad Y(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-t} - e^{t}\right\}.$$

Szukane rozwiązanie zagadnienia początkowego wyraża się wzorem

$$(x(t), y(t)) = (2\,\mathrm{ch}\, t, \, -2\,\mathrm{sh}\, t).$$