

Wykład 7

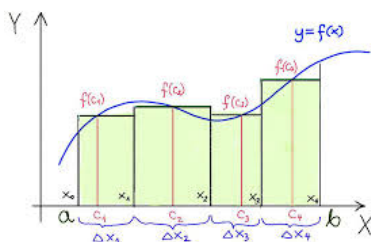
Całki podwójne

Wstęp (przypomnienie).

Żeby obliczyć z definicji $\int_a^b f(x) dx$ po przedziale $[a, b]$ z funkcji $f(x)$

1. dzielimy przedział na n odcinków długości Δx_i ,
2. w każdym wybieramy punkt c_i (zwiemy je *punktami pośrednimi*), i
3. obliczamy sumę $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$. (Jest to suma pól prostokątów, jak na rysunku poniżej.)

Jeśli odcinki podziału są bardzo małe (n jest bardzo duże), to suma ta (zwana *sumą całkową*) przybliża pole (trapeza krzywoliniowego) pod krzywą $y = f(x)$ (przy założeniu, że $f(x) > 0$).



Całkę oznaczoną definiujemy jako **granice ciągu sum całkowych** odpowiadających ciągowi podziałów $P_n = \{\Delta x_i\}_{i=1, \dots, n}$ odcinka $[a, b]$, dla których długość $\delta(P_n)$ najdłuższego odcinka w podziale P_n dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta(P_n) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i **nie zależy** ani od wyboru ciągu P_n podziałów odcinka $[a, b]$, ani od wyboru punktów pośrednich c_i . Mówimy wtedy, że funkcja $f(x)$ jest **całkowalna** w przedziale $[a, b]$.

Uwaga. Założenie, że granica nie zależy od „sposobu przybliżania pola”!

Najważniejsze twierdzenia rachunku całkowego, to:

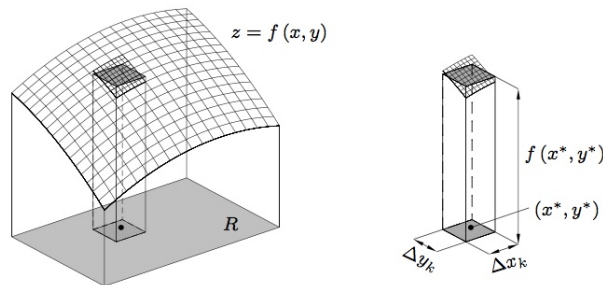
1. funkcja ciągła w przedziale, za wyjątkiem ewentualnie skończonej liczby punktów, jest całkowna
2. całkę oznaczoną można obliczyć przy pomocy całki nieoznaczonej (funkcji pierwotnej) jako $F(b) - F(a)$.

Całka podwójna.

Definiujemy ją analogicznie, tyle że na prostokącie zamiast na odcinku. Dla danego prostokąta R o bokach równoległych do osi Ox i Oy oraz funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$:

1. dzielimy ten prostokąt na n prostokątów (które łącznie wypełniają R i mają rozłączne wnętrza) o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k$;
2. w każdym z nich wybieramy punkt (x_k^*, y_k^*) (zwiemy je *punktami pośrednimi*),
3. obliczamy sumę $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_k \Delta y_k$. Jest to suma objętości prostopadłościaków, jak na rysunku poniżej.

Jeśli prostokąciki podziału są bardzo małe (oraz $f(x, y) > 0$), to suma ta (zwana *sumą całkową*) przybliża objętość bryły odciętej z graniastosłupa o podstawie R przez wykres funkcji $z = f(x, y)$.



Rys. 1.2. Ilustracja sumy całkowej

Całkę podwójną z funkcji $f(x, y)$ definiujemy jako granicę ciągu sum całkowych odpowiadających ciągowi podziałów \mathcal{P} prostokąta R , dla których maksymalna średnica $\delta(\mathcal{P})$ prostokąta w podziale \mathcal{P} dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_k \Delta y_k.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów \mathcal{P} prostokąta R , ani od wyboru punktów pośrednich (x_i^*, y_i^*) .

Mówimy wtedy, że funkcja $f(x, y)$ jest **całkowalna** w prostokącie R .
(Uwaga. Niektórzy autorzy, w tym Gewert-Skoczylas, zamiast $dx dy$ piszą czasami dP).

Interpretacja geometryczna. Geometrycznie wartość całki zdefiniowanej powyżej jest objętością bryły powstałej z graniastosłupa o podstawie R poprzez odcięcie wykresem funkcji $z = f(x, y)$ (jak na Rys. 1.2 powyżej).

Dokładniej, tak jest, gdy $f(x, y) > 0$ w prostokącie R . W ogólnym przypadku wartość całki jest różnicą objętości części bryły nad płaszczyzną Oxy i części pod tą płaszczyzną.

Własności całki podwójnej. Nietrudno pokazać, że tak zdefiniowana całka podwójna jest operatorem liniowym i addytywnym, to znaczy zachodzą wzory:

$$\iint_R (af(x, y) + bg(x, y)) dx dy = a \iint_R f(x, y) dx dy + b \iint_R g(x, y) dx dy$$

oraz jeśli R_1 i R_2 są prostokątami otrzymanymi z dowolnego podziału R na dwa prostokąty, to

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy.$$

Najważniejsze twierdzenie dotycząca całkowalności funkcji ciągłych i prawie ciągłych, oraz sposobów obliczania całki podwójnej.

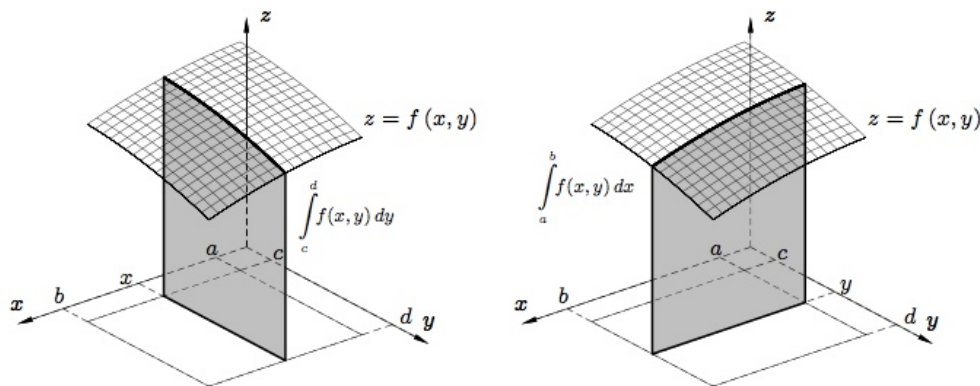
TWIERDZENIE *Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w każdym punkcie prostokąta za wyjątkiem punktów, które tworzą zbiór o polu zero, to $f(x, y)$ jest całkowalna w tym prostokącie.*

TWIERDZENIE *Dla takiej funkcji, jeśli $R = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Uzasadnienie. Sumy całkowite podwójne, rysunek poniżej.

Całki pojedyncze pojawiające się w powyższym wzorze nazywa się *całkami iterowanymi*. Najpierw całkujemy według jednej zmiennej, traktując drugą jako stałą, a otrzymany rezultat całkujemy według drugiej zmiennej.



Rys. 1.3. Ilustracja całek iterowanych

Dla uniknięcia dużych nawiasów często stosuje się zapis beznawiasowy:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

PRZYKŁAD. Obliczmy $\iint_R f(x, y) dx dy$ gdzie $R = \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$.

Stosujemy pierwszy wzór z twierdzenia

$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x) dy &= \int_1^2 dx \left[yx + \frac{1}{3}y^3 x \right]_{y=0}^{y=3} = \int_1^2 (3x + 9x) dx = [6x^2]_{x=1}^{x=2} = \\ &= 24 - 6 = 18. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że drugi wzór z twierdzenia daje to samo

$$\begin{aligned} \int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x) dx &= \int_0^3 dy \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \int_0^3 (2 + 2y^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2) dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^3 (1 + y^2) dy = \frac{3}{2} \left[y + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18. \end{aligned}$$

Całka podwójna po prostokącie jest tylko krokiem do zdefiniowania całki podwójnej po dowolnym obszarze ograniczonym D :

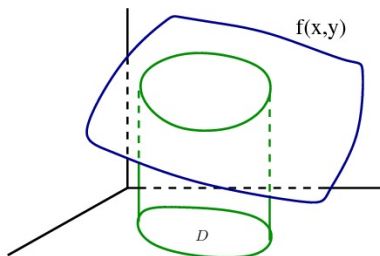
Całka podwójna po dowolnym obszarze.

Przedłużamy funkcję $f(x, y)$ określoną na obszarze D na zawierający ją prostokąt R , w ten sposób, że w punktach poza D funkcja przyjmuje wartość 0. Definiujemy więc:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy,$$

gdzie $f^*(x, y) = f(x, y)$ dla $(x, y) \in D$ oraz $f^*(x, y) = 0$ w przeciwnym razie, a R jest dowolnym prostokątem zawierającym D – o ile całka po prawej stronie istnieje. Wtedy mówimy, że $f(x, y)$ jest **całkowalna w obszarze D** .

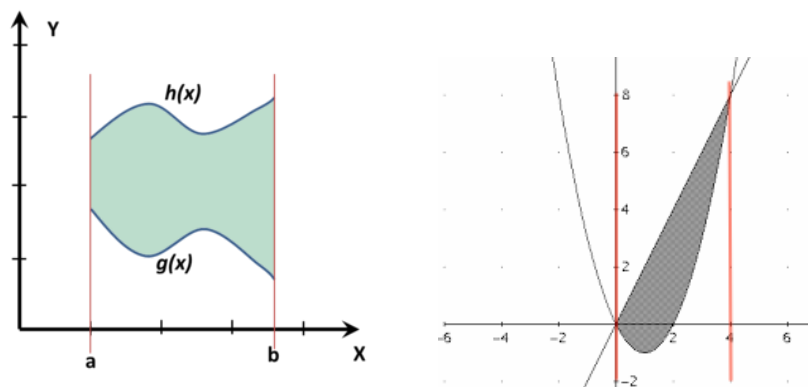
Można wykazać, że definicja ta nie zależy od wyboru prostokąta $R \supseteq D$, oraz że wyznacza objętość bryły powstałej z uogólnionego walca o podstawie D poprzez odcięcie wykresem funkcji $z = f(x, y)$ (jak na rys. poniżej).



Całka taka zachowuje własności całki po prostokącie: jest operatorem liniowym i jest addytywna względem dowolnych podziałów obszaru D : jeśli $D = D_1 \cup D_2$, i D_1, D_2 mają rozłączne wnętrza, to całka po D jest sumą całek po D_1 i D_2 .

Najważniejsze jest twierdzenie pozwalające sprowadzić obliczanie całek podwójnych po tzw. *obszarach normalnych* przy pomocy całek iterowanych.

Obszar postaci $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, gdzie funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe na odcinku $[a, b]$, oraz $g(x) < h(x)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi Ox .



Dla takich obszarów mamy

TWIERDZENIE *Jeśli D jest obszarem normalnym względem osi Ox zdefiniowanym powyżej, to*

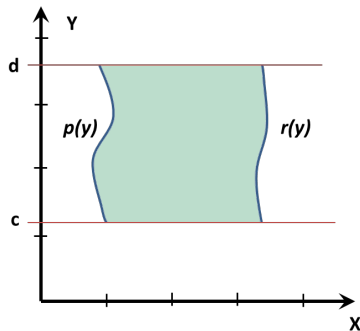
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

PRZYKŁAD. Obliczmy objętość bryły powstałej z uogólnionego walca o podstawie $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, x^2 - 2x \leq y \leq 2x\}$ (przedstawionej na prawym rysunku powyżej) poprzez odcięcie płaszczyzną $z = x + y$. W obliczeniach całkę iterowaną, podobnie jak wcześniej, piszemy w odwrotnej kolejności bez wielkich nawiasów. Mamy

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{x^2-2x}^{2x} (x + y) dy = \int_0^4 dx \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x^2-2x}^{y=2x} = \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 4x^2 \right) dx = \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{704}{15}. \end{aligned}$$

Podobnie definiujemy obszar normalny względem osi Oy i mamy analogiczny sposób obliczania.

Obszar postaci $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq r(y)\}$, gdzie funkcje $p(y)$ i $r(y)$ są ciągłe na odcinku $[c, d]$, oraz $p(y) < r(y)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi Oy



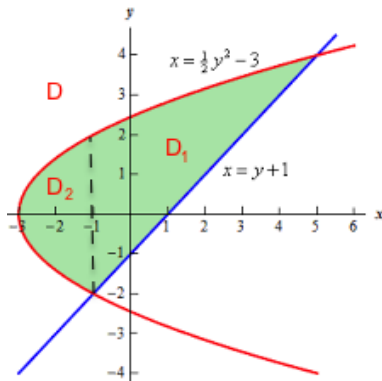
TWIERDZENIE Jeśli D jest obszarem normalnym względem osi Oy zdefiniowanym powyżej, to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{r(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Obszar regularny. Jeśli chcemy policzyć całkę podwójną po obszarze ograniczonym kilkoma różnymi krzywymi, to można go podzielić na kilka obszarów normalnych i całkę policzyć jako sumę całek po wydzielonych obszarach. Takie obszary

nazywamy *regularnymi*.

PRZYKŁAD. Obszar D narysowany poniżej nie jest obszarem normalnym względem osi Ox . Jest jednak obszarem regularnym, bo można go podzielić (linią przerywaną) na dwa obszary D_1 i D_2 normalne względem osi Ox .



Z drugiej strony D jest obszarem normalnym względem osi Oy . Całkę po tym obszarze możemy więc policzyć na dwa sposoby jak następuje:

$$\int_{-2}^4 dy \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} f(x, y) dx = \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x, y) dy + \int_{-1}^5 dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x, y) dy.$$

Wykład 8

Zmiana zmiennych w całce podwójnej – współrzędne biegunowe

Podobnie jak w przypadku całki pojedynczej istnieje możliwość łatwiejszego obliczenia całki podwójnej przez odpowiednie podstawienie. W tym przypadku mamy dwie zmienne, więc podstawienie ma postać:

$$\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

Jeśli D oraz Δ są regularnymi obszarami na płaszczyźnie takimi, że przekształcenie $\Phi : \Delta \rightarrow D : (u, v) \rightarrow (\phi(u, v), \psi(u, v))$ jest ciągle i wzajemnie jednoznaczne, to zachodzi wzór

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

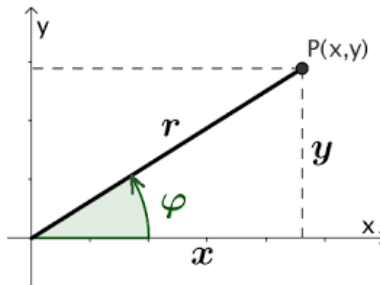
gdzie $J(u, v)$ jest tzw. *jakobianem* odwzorowania Φ określonym wzorem

$$J(u, v) = \det \begin{vmatrix} \phi'_u(u, v) & \phi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

Przykładem takiego przekształcenia jest $(r, \phi) \rightarrow (x, y)$ dane wzorami

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Wzory te noszą nazwę *współrzędnych biegunowych*. Współrzędne r i ϕ interpretuje się zwykle na płaszczyźnie we współrzędnych kartezjańskich jako długość promienia wodzącego punktu (x, y) oraz kąt między promieniem i osią Ox (jak na rysunku poniżej).



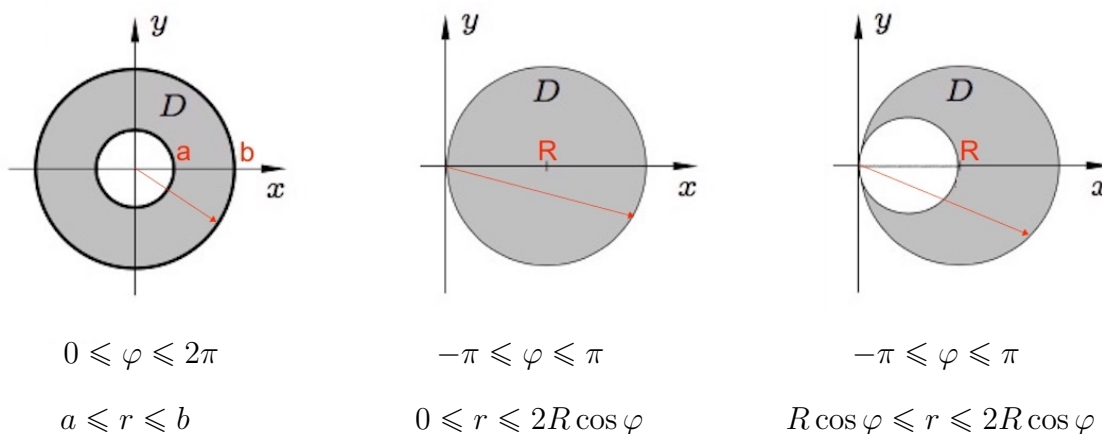
Przy tej interpretacji zamiast rozważania obszaru Δ we współrzędnych kartezjańskich (r, ϕ) rozważamy raczej *opis obszaru* D we współrzędnych biegunowych.

Przykład. Podstawiając współrzędne biegunowe do równania okręgu $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ (o środku $(R, 0)$ i promieniu R) otrzymujemy $r^2 \cos^2 \varphi - 2Rr \cos \varphi + R^2 + r^2 \sin^2 \varphi = R^2$, czyli po uproszczeniu $r = 2R \cos \varphi$.

Jest to równanie biegunowe tego okręgu.

Równanie biegunowe okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ o promieniu R i środku w układzie współrzędnych to po prostu $r = R$.

Na kolejnym rysunku pokazane są trzy obszary, które znacznie łatwiej opisać we współrzędnych biegunowych niż kartezjańskich (w drugim i trzecim przypadku wykorzystujemy uzyskany powyżej wzór).



Jakobian przekształcenia $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ odpowiadającego współrzędnym biegunowym wynosi

$$J(r, \varphi) = \det \begin{vmatrix} \phi'_r & \phi'_\varphi \\ \psi'_r & \psi'_\varphi \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Wzór na zmianę współrzędnych w całce podwójnej na współrzędne biegunowe przybiera więc postać

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

W drugiej całce przyjmujemy (trochę nieformalnie), że D jest tym samym obszarem tylko opisanym we współrzędnych biegunowych.

Należy pamiętać, że we wzorze oprócz zwykłego podstawienia współrzędnych biegunowych mamy jeszcze jacobian r (czyli za $dx dy$ podstawiamy $r dr d\varphi$).

Zmianę zmiennych na współrzędne biegunowe oplaca się zastosować szczególnie w sytuacji, gdy obszar jest określony fragmentami okręgów i funkcja podcałkowa przybiera we współrzędnych biegunowych w miarę prostą postać.

Przykład 2. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$,

gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

Generalnie w tego typu zadaniach najpierw należy rozpoznać (naszkieować) obszar całkowania, a następnie opisać go we współrzędnych biegunowych. W tym przypadku stwierdzamy, że D jest kołem $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ o środku $(0, 1)$ i promieniu 1.

Podstawiając współrzędne biegunowe do tego wzoru (lub do wyjściowej nierówności, która jest wygodniejsza do obliczeń) otrzymujemy:

$$0 \leq \varphi \leq \pi \text{ oraz } 0 \leq r \leq 2 \sin \varphi.$$

Jest to obszar normalny w tych współrzędnych, więc całkę podwójną możemy zamienić na całkę iterowaną:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2) dx dy &= \iint_D ((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2) r dr d\varphi = \iint_D r^3 dr d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^3 dr \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=2 \sin \varphi} d\varphi = 4 \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi = \left[\frac{3}{2} \varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

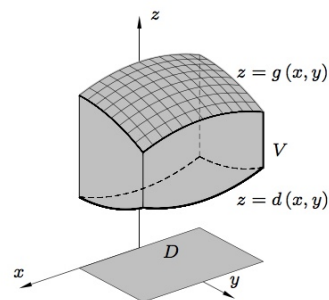
Zastosowania całki podwójnej do obliczania pól i objętości

1. Pole obszaru regularnego $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem

$$\text{Pole}(D) = \iint_D dx dy.$$

2. Objętość bryły V położonej nad obszarem $D \subset \mathbb{R}^2$ ograniczonej z dołu i z góry, odpowiednio, wykresami funkcji ciągłych $z = d(x, y)$ i $z = g(x, y)$ wyraża się wzorem

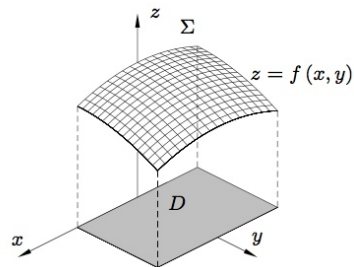
$$\text{Objętość}(V) = \iint_D (g(x, y) - d(x, y)) dx dy.$$



3. Pole powierzchni płata Σ będącego częścią wykresu funkcji $z = f(x, y)$ położoną nad obszarem $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem

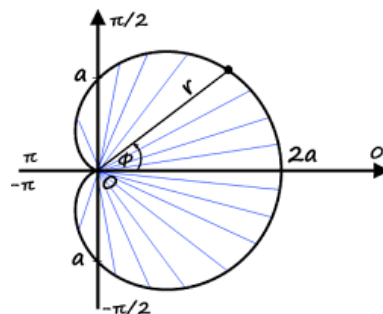
$$\text{Pole}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy,$$

przy założeniu, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w obszarze D .



Przykład 1. Wzór na pole prowadzi do tych samych obliczeń co wzór na pole z całką pojedynczą. Jedyną korzyścią jest możliwość użycia współrzędnych biegunowych, co czasami upraszcza obliczenia.

Na przykład pole obszaru ograniczonego kardioidą K o równaniu $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ możemy łatwo obliczyć wprowadzając współrzędne biegunowe. Po podstawieniu otrzymujemy $r = a(1 + \cos \varphi)$ jako równanie biegunowe kardioidy. Pole obliczamy następująco:



$$\text{Pole}(K) = \iint_K dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \dots = 3\pi a^2.$$

Obliczenia we współrzędnych kartezjańskich byłyby znacznie bardziej skomplikowane.

Przykład 2. Obliczmy objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy R . W tym celu rozważamy wykres funkcji $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$. Na wysokości $z = H$, przecięcie wykresu z płaszczyzną $z = H$ jest okręgiem $(H/a)^2 = x^2 + y^2$. Żeby uzyskać promień R musimy wziąć $a = \frac{H}{R}$.

Szukamy zatem objętości bryły D nad kołem $x^2 + y^2 = R^2$ pomiędzy wykresami $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $z = H$.

Przechodząc do współrzędnych biegunowych mamy $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ oraz $0 \leq r \leq R$. Zgodnie ze wzorem w punkcie 2. (pamiętając o jakobianie!)

$$\text{Objętość}(V) = \iiint_D \left(H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(H - \frac{Hr}{R} \right) r dr = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Przykład 3. Obliczmy pole powierzchni kuli K o promieniu R . Zastosujemy wzór z punktu 3. do płata półsfery $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Mamy

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

A zatem (wprowadzając współrzędne biegunowe tak jak poprzednio);

$$\begin{aligned} \text{Pole}(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}} dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2\pi R^2 \quad (\text{po podstawieniu } R^2 - r^2 = t^2). \end{aligned}$$

A zatem pole powierzchni całej kuli wynosi $\text{Pole}(K) = 4\pi R^2$.

Zastosowania całki podwójnej w fizyce

Wielkości fizyczne charakteryzujące rozkład masy (lub ładunku)

1. **Masa obszaru** D : jeśli obszar ma stałą gęstość σ , to $M = \sigma \cdot P$

Jeśli gęstość niejednorodna $\sigma = \sigma(x, y)$, to masa wyraża się wzorem:

$$M = \iint_D \sigma(x, y) \, dx dy$$

2. **Momenty statyczne** MS_x, MS_y względem osi Ox i Oy obszaru D

$$MS_x = \iint_D y\sigma(x, y) \, dx dy \quad MS_y = \iint_D x\sigma(x, y) \, dx dy$$

3. **Środek masy** obszaru D ma współrzędne (x_C, y_C) :

$$x_C = \frac{MS_y}{M} = \frac{\iint_D x\sigma(x, y) \, dx dy}{\iint_D \sigma(x, y) \, dx dy} \quad y_C = \frac{MS_x}{M} = \frac{\iint_D y\sigma(x, y) \, dx dy}{\iint_D \sigma(x, y) \, dx dy}$$

co w przypadku stałej gęstości daje

$$x_C = \frac{1}{\text{pole}(D)} \iint_D x \, dx dy \quad y_C = \frac{1}{\text{pole}(D)} \iint_D y \, dx dy$$

4. **Momenty bezwładności** I_x, I_y względem osi Ox i Oy obszaru D (momenty drugiego stopnia)

$$I_x = \iint_D y^2 \sigma(x, y) \, dx dy \quad I_y = \iint_D x^2 \sigma(x, y) \, dx dy$$

Moment bezwładności I_O względem środka układu współrzędnych O obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyraża się wzorem

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) \, dx dy$$

co w przypadku stałej gęstości daje

$$I_x = \frac{M}{\text{pole}(D)} \iint_D y^2 \, dx dy \quad I_y = \frac{M}{\text{pole}(D)} \iint_D x^2 \, dx dy$$

oraz

$$I_O = \frac{M}{\text{pole}(D)} \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy.$$

Wykład 8a (dodatek)

Całki potrójne

Definicja całki potrójnej, główne twierdzenia i metody obliczania są analogiczne do całki podwójnej. Zwróć szczególną uwagę na to co ulega zmianie.

Całkę potrójną definiujemy wstępnie na **prostopadłościanie** (zamiast na prostokącie). Dla danego prostopadłościanu R o bokach równoległych do osi Ox , Oy i Oz oraz funkcji **trzech** zmiennych $f(x, y, z)$, dzielimy ten prostopadłościan na n prostopadłościanów (które łącznie wypełniają R i mają rozłączne wnętrza) o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$; w każdym z nich wybieramy punkt (x_k^*, y_k^*, z_k^*) (zwiemy je *punktami pośrednimi*), i obliczamy sumę $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$.

Całkę potrójną z funkcji $f(x, y, z)$ definiujemy jako granicę ciągu sum całkowitych odpowiadających ciągowi podziałów \mathcal{P} prostopadłościanu R , dla których maksymalna średnica $\delta(\mathcal{P})$ prostopadłościanu w podziale \mathcal{P} dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów \mathcal{P} prostopadłościanu R , ani od wyboru punktów pośrednich (x_k^*, y_k^*, z_k^*) . Mówimy wtedy, że funkcja $f(x, y, z)$ jest *całkowalna* w prostopadłościanie R . (*Uwaga.* Zapis $dx dy dz$ zastępujemy czasami skrótem dV).

Własności całki potrójnej. Podobnie jak całka podwójna, całka potrójna jest operatorem liniowym i addytywnym, to znaczy zachodzą wzory:

$$\iiint_R (af(x, y, z) + bg(x, y, z)) dV = a \iiint_R f(x, y, z) dV + b \iiint_R g(x, y, z) dV$$

oraz jeśli R_1 i R_2 są prostopadłościanami otrzymanymi z dowolnego podziału R na dwa prostopadłościany, to

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z) dV.$$

Najważniejsze twierdzenie dotyczą ponownie całkowalności funkcji ciągłych i prawie ciągłych, oraz sposobów obliczania całki potrójnej.

TWIERDZENIE *Jeśli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła w każdym punkcie prostopadłościanu za wyjątkiem punktów, które tworzą zbiór o objętości zero, to $f(x, y, z)$ jest*

całkowalna w tym prostopadłościanie.

TWIERDZENIE Dla takiej funkcji, jeśli $R = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_r^s f(x, y, z) dz.$$

Całki w powyższym wzorze nazywają się, podobnie jak dla całki podwójnej, *całkami iterowanymi* i stosujemy podobną konwencję zapisu w celu uniknięcia dużych nawiasów. Kolejność całek iterowanych (zmiennych) w powyższym twierdzeniu może być oczywiście dowolna.

Całka potrójna po dowolnym obszarze. Podobnie jak w przypadku całki podwójnej, całka potrójna po prostopadłościanie jest tylko krokiem do zdefiniowania całki potrójnej po dowolnym obszarze ograniczonym U w przestrzeni \mathbb{R}^3 . W tym celu przedłużamy funkcję $f(x, y, z)$ określoną na obszarze $U \subset \mathbb{R}^3$ na zawierający ten obszar prostopadłościan $R \supseteq U$, w ten sposób, że w punktach poza U funkcja przyjmuje wartość 0. Definiujemy więc

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_R f^*(x, y, z) dV,$$

gdzie $f^*(x, y, z) = f(x, y, z)$ dla $(x, y, z) \in U$ oraz $f^*(x, y, z) = 0$ w przeciwnym razie, a R jest dowolnym prostopadłościanem zawierającym U . Definicja jest poprawna, o ile całka po prawej stronie istnieje. Wtedy mówimy, że $f(x, y, z)$ jest *całkowalna w obszarze* U . Można wykazać, że definicja ta nie zależy od wyboru prostopadłościanu $R \supseteq U$.

Całka taka zachowuje własności całki po prostopadłościanie: jest operatorem liniowym i jest addytywna względem dowolnych podziałów obszaru U : jeśli $U = U_1 \cup U_2$, i U_1, U_2 mają rozłączne wnętrza, to całka po U jest sumą całek po U_1 i U_2 .

Najważniejsze jest twierdzenie pozwalające na obliczanie całek potrójnych po *obszarze normalnym* przy pomocy całek iterowanych. Obszar postaci $U = \{(x, y) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, gdzie funkcje $h_1(x) \leq h_2(x)$ oraz $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ są ciągle w odpowiednich dziedzinach, nazywamy *obszarem normalnym*. Dla takich obszarów mamy

TWIERDZENIE Jeśli U jest obszarem normalnym zdefiniowanym powyżej, to

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

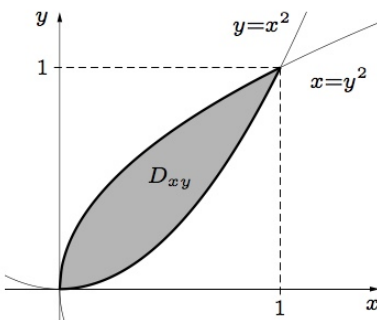
Twierdzenie to zachodzi dla obszarów normalnych zdefiniowanych analogicznie przy

zastosowaniu dowolnej kolejności zmiennych.

Obszar regularny. Tak jak w przypadku całki podwójnej obszar regularny to taki, który da się przedstawić jako suma obszarów normalnych o rozłącznych wnętrzach. Wówczas całka potrójna po takim obszarze regularnym jest sumą całek po składowych obszarach normalnych.

Przykład. Obliczmy całkę potrójną $\iiint_U xyz \, dx \, dy \, dz$ po obszarze $U : y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy$;

Żeby wyobrazić sobie obszar (bryłę) po której całkujemy, zauważmy najpierw, że dwa pierwsze warunki w opisie U nie zawierają zmiennej z . Oznacza to, że wyznaczają one obszar D_{xy} na płaszczyźnie Oxy . (Dla warunków z zadania przedstawiony on jest na rysunku poniżej.)



W przestrzeni warunki te wyznaczają obszar złożony z prostych prostopadłych do płaszczyzny Oxy przechodzących przez obszar D_{xy} . Trzeci warunek odcina z tego obszaru kawałek ograniczony od dołu płaszczyzną $z = 0$ i od góry powierzchnią $z = xy$ (czasami taką bryłę nazywa się *walcem krzywoliniowym* o podstawie D_{xy}). Podstawa D_{xy} jest w tym przypadku obszarem normalnym, który można opisać warunkami $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$. Po dopisaniu trzeciego warunku otrzymujemy opis obszaru normalnego w przestrzeni. W związku z tym

$$\iiint_U xyz \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{xy} xyz \, dz =$$

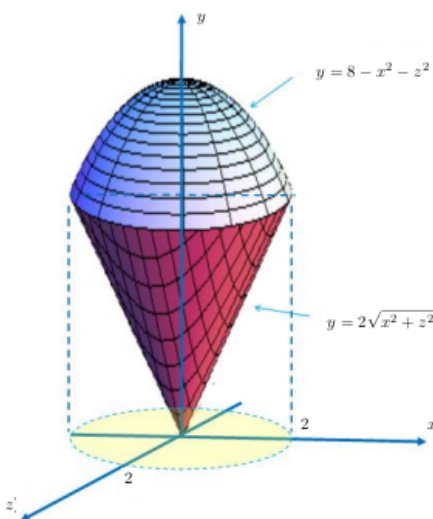
i obliczając dalej

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=xy} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^4}{4} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{8} \int_0^1 (x^5 - x^{11}) dx = \frac{1}{8} \int_0^1 \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{96}.$$

Jak widać zasadniczą częścią rozwiązania jest opisanie obszaru całkowania jako obszaru normalnego i zapisanie całki potrójnej w postaci całki iterowanej. Generalnie, jeśli mamy warunki bez zmiennej z wyznaczające obszar ograniczony D_{xy} na płaszczyźnie Oxy , to obszar normalny opisujemy w podobny sposób. (Rolę wyróżnionej zmiennej z może oczywiście pełnić inna zmienna, a kolejność zmiennych może być dowolna, w zależności od obszaru). Poniżej podajemy przykład nieco innej sytuacji.

Przykład 2. Zapisać całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$ po obszarze U ograniczonym krzywymi $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 8 - x^2 - z^2$ jako całkę iterowaną.

Tutaj mamy dwie przecinające się powierzchnie i wyznaczenie opisu ograniczonego przez nie obszaru jako obszaru normalnego lub regularnego może być trudniejsze. (W tym przypadku pomocne jest zauważenie, że dwie przecinające się powierzchnie to stożek i paraboloida, z osią Oy jako osią symetrii; dzięki temu możemy sobie wyobrazić kształt bryły w przestrzeni; zob. rysunek).



Wracamy do równań obu powierzchni. Rugując z nich zmienną y , widzimy, że współrzędne x i z punktów przecięcia powierzchni spełniają równanie:

$$2\sqrt{x^2 + z^2} = 8 - x^2 - z^2.$$

Próba uproszczenia tego równania prowadzi do równania 4 stopnia dwóch zmiennych, z którego niewiele wynika. Rzeczywiste uproszczenie daje podstawienie $t = \sqrt{x^2 + z^2}$. Otrzymujemy wówczas

$$2t = 8 - t^2 \quad \text{czyli} \quad t^2 + 2t - 8 = 0.$$

Stąd $t = 2$ lub $t = -4$, ale ponieważ $t \geq 0$, jedyną możliwością jest $t = 2$. A zatem całe równanie sprowadza się do równania $\sqrt{x^2 + z^2} = 2$ czyli

$$x^2 + z^2 = 4.$$

Wynika stąd, że rzut prostopadły na płaszczyznę Oxz przecięcia się obu powierzchni jest okręgiem o środku $(0, 0)$ i promieniu 2 (jak na rysunku). Wobec tego nietrudno już opisać cały obszar:

$$-2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2}, \quad 2\sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq 8-x^2-z^2$$

(pierwsze dwa warunki opisują obszar na płaszczyźnie Oxz ograniczony okręgiem $x^2 + z^2 = 4$). Zatem

$$\iiint_U xyz \, dx \, dy \, dz = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dz \int_{2\sqrt{x^2+z^2}}^{8-x^2-z^2} f(x, y, z) \, dy.$$

Zastosowania całek potrójnych. Do obliczania objętości brył (obszarów w przestrzeni) i różnych wielkości fizycznych z niejednorodnym rozkładem w przestrzeni (w szczególności, masy i momentów, ładunków po obszarach przestrzennych).

Współrzędne walcowe i sferyczne. W przypadku całki potrójnej mamy dwa klasyczne sposoby zamiany zmiennych ułatwiające znacznie, w niektórych przypadkach, obliczenia: współrzędne walcowe (odpowiednik biegunowych na płaszczyźnie) i współrzędne sferyczne.