Wykład 7

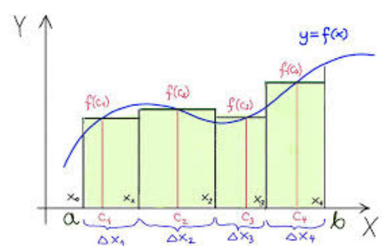
Całki podwójne

Wstęp (przypomnienie).

Żeby obliczyć z definicji $\int_a^b f(x)\,dx$ po przedziale $[a, b]$ z funkcji $f(x)$

1. dzielimy przedział na n odcinków długości Δx_i,
2. w każdym wybieramy punkt c_i (zwiemy je *punktami pośrednimi*), i
3. obliczamy sumę $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. (Jest to suma pól prostokątów, jak na rysunku poniżej.)

Jeśli odcinki podziału są bardzo małe (n jest bardzo duże), to suma ta (zwana *sumą całkową*) przybliża pole (trapeza krzywoliniowego) pod krzywą $y = f(x)$ (przy założeniu, że $f(x) > 0$).



Całkę oznaczoną definiujemy jako **granicę ciągu sum całkowych** odpowiadających ciągowi podziałów $P_n = \{\Delta x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ odcinka $[a, b]$, dla których długość $\delta(P_n)$ najdłuższego odcinka w podziale P_n dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(P_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i **nie zależy** ani od wyboru ciągu P_n podziałów odcinka $[a, b]$, ani od wyboru punktów pośrednich c_i. Mówimy wtedy, że funkcja $f(x)$ jest **całkowalna** w przedziale $[a, b]$.

Uwaga. Założenie, że granica nie zależy od „sposobu przybliżania pola”!

Najważniejsze twierdzenia rachunku całkowego, to:

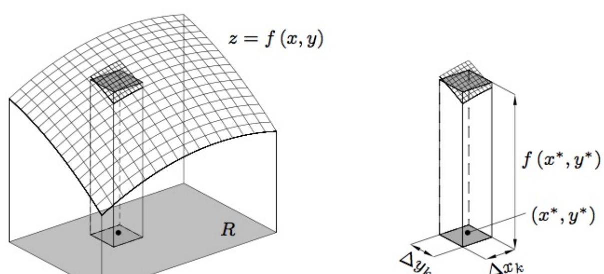
1. funkcja ciągła w przedziale, za wyjątkiem ewentualnie skończonej liczby punktów, jest całkowalna
2. całkę oznaczoną można obliczyć przy pomocy całki nieoznaczonej (funkcji pierwotnej) jako $F(b) - F(a)$.

Całka podwójna.

Definiujemy ją analogicznie, tyle że na prostokącie zamiast na odcinku. Dla danego prostokąta R o bokach równoległych do osi Ox i Oy oraz funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$:

1. dzielimy ten prostokąt na n prostokątów (które całkowicie wypełniają R i mają rozłączne wnętrza) o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k$;
2. w każdym z nich wybieramy punkt (x_k^*, y_k^*) (zwiemy je *punktami pośrednimi*),
3. obliczamy sumę $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_k \Delta y_k$. Jest to suma objętości prostopadłościanów, jak na rysunku poniżej.

Jeśli prostokąciki podziału są bardzo małe (oraz $f(x, y) > 0$), to suma ta (zwana *sumą całkową*) przybliża objętość bryły odciętej z graniastosłupa o podstawie R przez wykres funkcji $z = f(x, y)$.



Rys. 1.2. Ilustracja sumy całkowej

Całkę podwójną z funkcji $f(x, y)$ definiujemy jako granicę ciągu sum całkowych odpowiadających ciągowi podziałów $\mathcal{P}$ prostokąta R, dla których maksymalna średnica $\delta(\mathcal{P})$ prostokąta w podziale $\mathcal{P}$ dąży do 0. Zapisujemy to wzorem:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_k \Delta y_k.$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie istnieje i nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów $\mathcal{P}$ prostokąta R, ani od wyboru punktów pośrednich (x_i^*, y_i^*).

Mówimy wtedy, że funkcja $f(x,y)$ jest **całkowalna** w prostokącie R.
(*Uwaga*. Niektórzy autorzy, w tym Gewert-Skoczylas, zamiast $dx\,dy$ piszą czasami dP).

Interpretacja geometryczna. Geometrycznie wartość całki zdefiniowanej powyżej jest objętością bryły powstałej z graniastosłupa o podstawie R poprzez odcięcie wykresem funkcji $z = f(x,y)$ (jak na Rys. 1.2 powyżej).

Dokładniej, tak jest, gdy $f(x,y) > 0$ w prostokącie R. W ogólnym przypadku wartość całki jest różnicą objętości części bryły nad płaszczyzną Oxy i części pod tą płaszczyzną.

Własności całki podwójnej. Nietrudno pokazać, że tak zdefiniowana całka podwójna jest operatorem liniowym i addytywnym, to znaczy zachodzą wzory:

$$\iint\limits_R (af(x,y) + bg(x,y))\,dx\,dy = a\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy + b\iint\limits_R g(x,y)\,dx\,dy$$

oraz jeśli R_1 i R_2 są prostokątami otrzymanymi z dowolnego podziału R na dwa prostokąty, to

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Najważniejsze twierdzenie dotyczą całkowalności funkcji ciągłych i prawie ciągłych, oraz sposobów obliczania całki podwójnej.

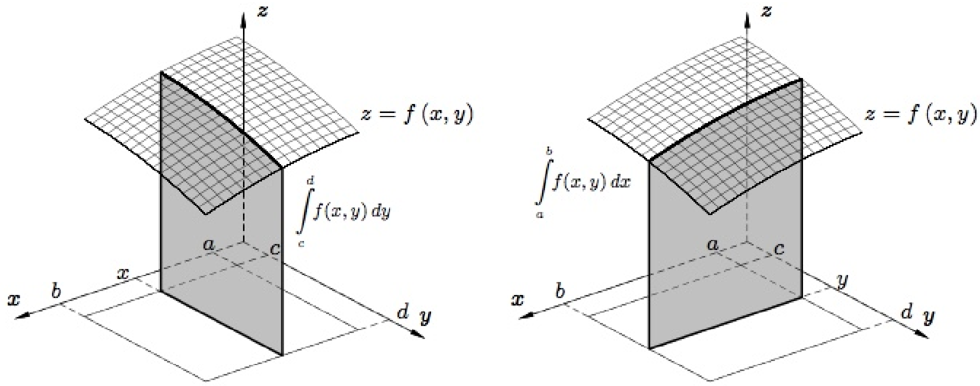
Twierdzenie *Jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w każdym punkcie prostokąta za wyjątkiem punktów, które tworzą zbiór o polu zero, to $f(x,y)$ jest całkowalna w tym prostokącie.*

Twierdzenie *Dla takiej funkcji, jeśli $R = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Uzasadnienie. Sumy całkowe podwójne, rysunek poniżej.

Całki pojedyncze pojawiające się w powyższym wzorze nazywa się *całkami iterowanymi*. Najpierw całkujemy według jednej zmiennej, traktując drugą jako stałą, a otrzymany rezultat całkujemy według drugiej zmiennej.



Rys. 1.3. Ilustracja całek iterowanych

Dla uniknięcia dużych nawiasów często stosuje się zapis beznawiasowy:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

PRZYKŁAD. Obliczmy $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$ gdzie $R = \{1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$. Stosujemy pierwszy wzór z twierdzenia

$$\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x)\,dy = \int_1^2 dx \left[yx + \frac{1}{3} y^3 x \right]_{y=0}^{y=3} = \int_1^2 (3x + 9x)\,dx = \left[6x^2 \right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= 24 - 6 = 18.$$

Sprawdzamy, że drugi wzór z twierdzenia daje to samo

$$\int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x)\,dx = \int_0^3 dy \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \int_0^3 (2 + 2y^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^3 (1 + y^2) dy = \frac{3}{2} \left[y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18.$$

Całka podwójna po prostokącie jest tylko krokiem do zdefiniowania całki podwójnej po dowolnym obszarze ograniczonym D:

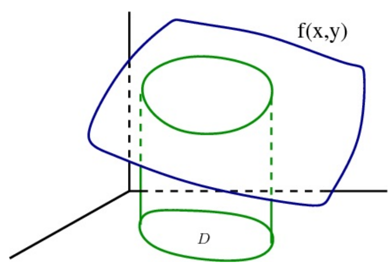
Całka podwójna po dowolnym obszarze.

Przedłużamy funkcję $f(x,y)$ określoną na obszarze D na zawierający ją prostokąt R, w ten sposób, że w punktach poza D funkcja przyjmuje wartość 0. Definiujemy więc:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f^*(x,y)\,dx\,dy,$$

gdzie $f^*(x,y) = f(x,y)$ dla $(x,y) \in D$ oraz $f^*(x,y) = 0$ w przeciwnym razie, a R jest dowolnym prostokątem zawierającym D – o ile całka po prawej stronie istnieje. Wtedy mówimy, że $f(x,y)$ jest **całkowalna w obszarze** D.

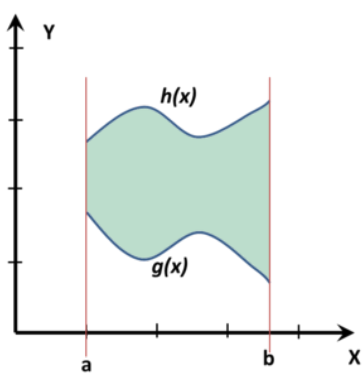
Można wykazać, że definicja ta nie zależy od wyboru prostokąta $R \supseteq D$, oraz że wyznacza objętość bryły powstałej z uogólnionego walca o podstawie D poprzez odcięcie wykresem funkcji $z = f(x,y)$ (jak na rys. poniżej).

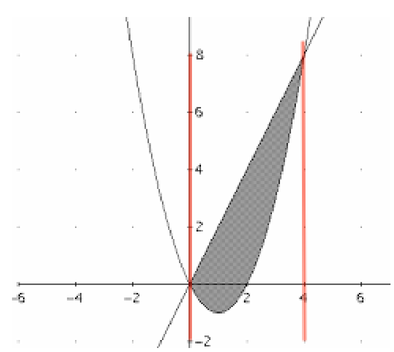


Całka taka zachowuje własności całki po prostokącie: jest operatorem liniowym i jest addytywna względem dowolnych podziałów obszaru D: jeśli $D = D_1 \cup D_2$, i D_1, D_2 mają rozłączne wnętrza, to całka po D jest sumą całek po D_1 i D_2.

Najważniejsze jest twierdzenie pozwalające sprowadzić obliczanie całek podwójnych po tzw. *obszarach normalnych* przy pomocy całek iterowanych.

Obszar postaci $D = \{(x,y) :\ a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$, gdzie funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe na odcinku $[a,b]$, oraz $g(x) < h(x)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi Ox.





Dla takich obszarów mamy

Twierdzenie *Jeśli D jest obszarem normalnym względem osi Ox zdefiniowanym powyżej, to*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

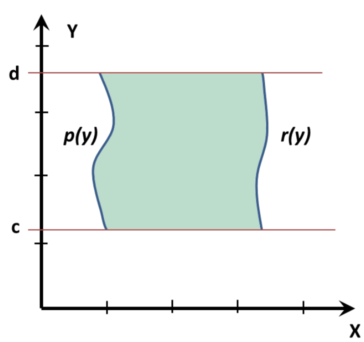
Przykład. Obliczmy objętość bryły powstałej z uogólnionego walca o podstawie $D = \{(x,y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ x^2 - 2x \leqslant y \leqslant 2x\}$ (przedstawionej na prawym rysunku powyżej) poprzez odcięcie płaszczyzną $z = x + y$. W obliczeniach całkę iterowaną, podobnie jak wcześniej, piszemy w odwrotnej kolejności bez wielkich nawiasów. Mamy

$$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{x^2-2x}^{2x} (x+y)\,dy = \int_0^4 dx \left[(xy + \frac{1}{2}y^2) \right]_{y=x^2-2x}^{y=2x} =$$

$$= \int_0^4 (-\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 4x^2)dx = \left[\frac{-x^5}{10} + \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{704}{15}.$$

Podobnie definiujemy obszar normalny względem osi Oy i mamy analogiczny sposób obliczania.

Obszar postaci $D = \{(x,y) :\ c \leqslant y \leqslant d, p(y) \leqslant x \leqslant r(y)\}$, gdzie funkcje $p(y)$ i $r(y)$ są ciągłe na odcinku $[c,d]$, oraz $p(y) < r(y)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi Oy

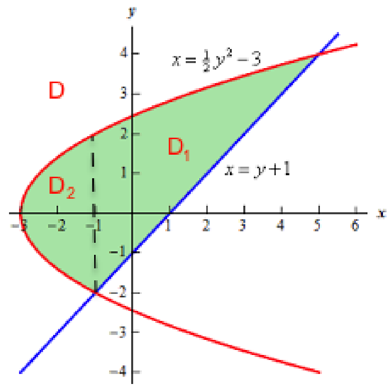


Twierdzenie *Jeśli D jest obszarem normalnym względem osi Oy zdefiniowanym powyżej, to*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{p(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Obszar regularny. Jeśli chcemy policzyć całkę podwójną po obszarze ograniczonym kilkoma różnymi krzywymi, to można go podzielić na kilka obszarów normalnych i całkę policzyć jako sumę całek po wydzielonych obszarach. Takie obszary nazywamy *regularnymi*.

Przykład. Obszar D narysowany poniżej nie jest obszarem normalnym względem osi Ox. Jest jednak obszarem regularnym, bo można go podzielić (linią przerywaną) na dwa obszary D_1 i D_2 normalne względem osi Ox.



Z drugiej strony D jest obszarem normalnym względem osi Oy. Całkę po tym obszarze możemy więc policzyć na dwa sposoby jak następuje:

$$\int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} f(x,y)\,dx = \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{5} dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\,dy.$$

Wykład 8

Zmiana zmiennych w całce podwójnej – współrzędne biegunowe

Podobnie jak w przypadku całki pojedynczej istnieje możliwość łatwiejszego obliczania całki podwójnej przez odpowiednie podstawienie. W tym przypadku mamy dwie zmienne, więc podstawienie ma postać:

$$\begin{cases} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

Jeśli D oraz Δ są regularnymi obszarami na płaszczyźnie takimi, że przekształcenie $\Phi : \Delta \to D : (u,v) \to (\phi(u,v), \psi(u,v))$ jest ciągłe i wzajemnie jednoznaczne, to zachodzi wzór

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} f(\phi(u,v), \psi(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv,$$

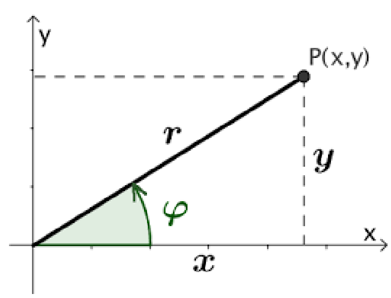
gdzie $J(u,v)$ jest tzw. *jakobianem* odwzorowania Φ określonym wzorem

$$J(u,v) = \det \begin{vmatrix} \phi'_u(u,v) & \phi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix}$$

Przykładem takiego przekształcenia jest $(r,\phi) \to (x,y)$ dane wzorami

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Wzory te noszą nazwę *współrzędnych biegunowych*. Współrzędne r i ϕ interpretuje się zwykle na płaszczyźnie we współrzędnych kartezjańskich jako długość promienia wodzącego punktu (x,y) oraz kąt między promieniem i osią Ox (jak na rysunku poniżej).

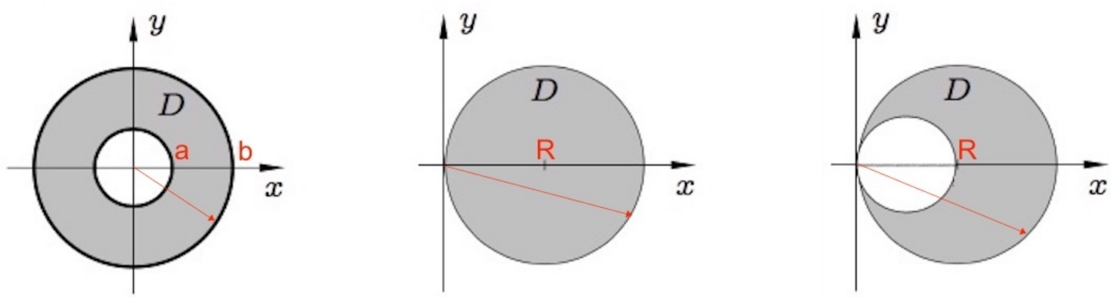


Przy tej interpretacji zamiast rozważania obszaru Δ we współrzędnych kartezjańskich (r,ϕ) rozważamy raczej *opis obszaru D* we współrzędnych biegunowych.

Przykład. Podstawiając współrzędne biegunowe do równania okręgu $(x-R)^2+y^2=R^2$ (o środku $(R,0)$ i promieniu R) otrzymujemy $r^2\cos^2\varphi-2Rr\cos\varphi+R^2+r^2\sin^2\varphi=R^2$, czyli po uproszczeniu $r=2R\cos\varphi$.
Jest to równanie biegunowe tego okręgu.

Równanie biegunowe okręgu $x^2+y^2=R^2$ o promieniu R i środku w układzie współrzędnych to po prostu $r=R$.

Na kolejnym rysunku pokazane są trzy obszary, które znacznie łatwiej opisać we współrzędnych biegunowych niż kartezjańskich (w drugim i trzecim przypadku wykorzystujemy uzyskany powyżej wzór).



$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$	$-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$	$-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$
$a\leqslant r\leqslant b$	$0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi$	$R\cos\varphi\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi$

Jakobian przekształcenia $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ odpowiadającego współrzędnym biegunowym wynosi

$$J(r,\varphi)=\det\begin{vmatrix}\phi'_r & \phi'_\varphi\\ \psi'_r & \psi'_\varphi\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

Wzór na zmianę współrzędnych w całce podwójnej na współrzędne biegunowe przybiera więc postać

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi,$$

W drugiej całce przyjmujemy (trochę nieformalnie), że D jest tym samym obszarem tylko opisanym we współrzędnych biegunowych.
Należy pamiętać, że we wzorze oprócz zwykłego podstawienia współrzędnych biegunowych mamy jeszcze jakobian r (czyli za $dxdy$ podstawiamy $rdrd\varphi$).

Zmianę zmiennych na współrzędne biegunowe opłaca się zastosować szczególnie w sytuacji, gdy obszar jest określony fragmentami okręgów i funkcja podcałkowa przybiera we współrzędnych biegunowych w miarę prostą postać.

Przykład 2. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, gdzie $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\}$.

Generalnie w tego typu zadaniach najpierw należy rozpoznać (naszkicować) obszar całkowania, a następnie opisać go we współrzędnych biegunowych. W tym przypadku stwierdzamy, że D jest kołem $x^2+(y-1)^2 \leqslant 1$ o środku $(0,1)$ i promieniu 1.

Podstawiając współrzędne biegunowe do tego wzoru (lub do wyjściowej nierówności, która jest wygodniejsza do obliczeń) otrzymujemy:
$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ oraz $0 \leqslant r \leqslant 2\sin\varphi$.
Jest to obszar normalny w tych współrzędnych, więc całkę podwójną możemy zamienić na całkę iterowaną:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_D \Big((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\Big)\,r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_D r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} r^3\,dr$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2\sin\varphi} d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi} \sin^4\varphi\,d\varphi = \left[\frac{3}{2}\varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

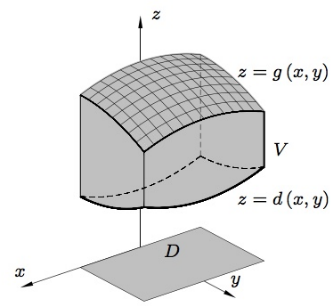
Zastosowania całki podwójnej do obliczania pól i objętości

1. *Pole obszaru* regularnego $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem

$$\text{Pole}(D) = \iint\limits_D dx\,dy.$$

2. *Objętość bryły* V położonej nad obszarem $D \subset \mathbb{R}^2$ ograniczonej z dołu i z góry, odpowiednio, wykresami funkcji ciągłych $z = d(x,y)$ i $z = g(x,y)$ wyraża się wzorem

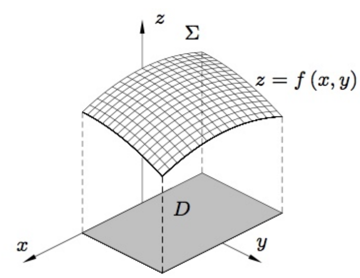
$$\text{Objetość}(V) = \iint\limits_D (g(x,y) - d(x,y))\,dx\,dy.$$



3. *Pole powierzchni płata* Σ będącego częścią wykresu funkcji $z = f(x,y)$ położoną nad obszarem $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem

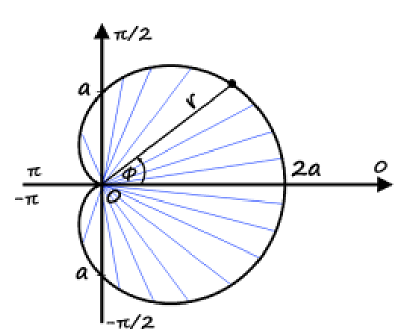
$$\text{Pole}(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dx\,dy,$$

przy założeniu, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w obszarze D.



Przykład 1. Wzór na pole prowadzi do tych samych obliczeń co wzór na pole z całką pojedynczą. Jedyną korzyścią jest możliwość użycia współrzędnych biegunowych, co czasami upraszcza obliczenia.

Na przykład pole obszaru ograniczonego kardioidą K o równaniu $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ możemy łatwo obliczyć wprowadzając współrzędne biegunowe. Po podstawieniu otrzymujemy $r = a(1 + \cos\varphi)$ jako równanie biegunowe kardioidy. Pole obliczamy następująco:



$$\text{Pole}(K) = \iint\limits_K dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr \;=\; \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi \;= \ldots = 3\pi a^2.$$

Obliczenia we współrzędnych kartezjańskich byłyby znacznie bardziej skomplikowane.

Przykład 2. Obliczmy objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy R. W tym celu rozważamy wykres funkcji $z = a\sqrt{x^2+y^2}$. Na wysokości $z = H$, przecięcie wykresu z płaszczyzną $z = H$ jest okręgiem $(H/a)^2 = x^2 + y^2$. Żeby uzyskać promień R musimy wziąć $a = \dfrac{H}{R}$.

Szukamy zatem objętości bryły D nad kołem $x^2 + y^2 = R^2$ pomiędzy wykresami $z = \dfrac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ oraz $z = H$.

Przechodząc do współrzędnych biegunowych mamy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ oraz $0 \leqslant r \leqslant R$. Zgodnie ze wzorem w punkcie 2. (pamiętając o jakobianie!)

$$\text{Objętość}(V) = \iint\limits_D \left(H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \left(H - \frac{Hr}{R}\right) r\,dr = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Przykład 3. Obliczmy pole powierzchni kuli K o promieniu R. Zastosujemy wzór z punktu 3. do płata półsfery $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Mamy

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

A zatem (wprowadzając współrzędne biegunowe tak jak poprzednio);

$$\text{Pole}(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2-r^2}}\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = 2\pi R^2 \quad \text{(po podstawieniu } R^2 - r^2 = t^2\text{)}.$$

A zatem pole powierzchni całej kuli wynosi $\text{Pole}(K) = 4\pi R^2$.

Wykład 9

Zastosowania całki podwójnej w fizyce

Wielkości fizyczne charakteryzujące rozkład masy (lub ładunku)

1. **Masa obszaru** D: jeśli obszar ma stałą gęstość σ, to $M = \sigma \cdot P$

Jeśli gęstość niejednorodna $\sigma = \sigma(x, y)$, to masa wyraża się wzorem:

$$M = \iint\limits_D \sigma(x, y)\, dxdy$$

2. **Momenty statyczne** MS_x, MS_y względem osi Ox i Oy obszaru D

$$MS_x = \iint\limits_D y\sigma(x, y)\, dxdy \qquad MS_y = \iint\limits_D x\sigma(x, y)\, dxdy$$

3. **Środek masy** obszaru D ma współrzędne (x_C, y_C):

$$x_C = \frac{MS_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\sigma(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\, dxdy} \qquad y_C = \frac{MS_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\sigma(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\, dxdy}$$

co w przypadku stałej gęstości daje

$$x_C = \frac{1}{\text{pole}(D)} \iint\limits_D x\, dxdy \qquad y_C = \frac{1}{\text{pole}(D)} \iint\limits_D y\, dxdy$$

4. **Momenty bezwładności** I_x, I_y względem osi Ox i Oy obszaru D (momenty drugiego stopnia)

$$I_x = \iint\limits_D y^2\sigma(x, y)\, dxdy \qquad I_y = \iint\limits_D x^2\sigma(x, y)\, dxdy$$

Moment bezwładności I_O względem środka układu współrzędnych O obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyraża się wzorem

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sigma(x,y)\, dxdy$$

Przykłady. Środek ciężkości obszaru jednorodnego $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2$: