Podzielność

Rozkład na czynniki pierwsze

1. Udowodnij, że jeśli $a^n | b^{n+1}$ dla pewnych liczb całkowitych a, b i wszystkich liczb całkowitych dodatnich n, to $a|b$.
2. Przez jaką najwyższą potęgę liczby pierwszej p dzieli się $n!$, gdzie n jest liczbą całkowitą nieujemną?
3. Udowodnij, że $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ jest liczbą całkowitą dla dowolnych całkowitych nieujemnych k, l.
4. [14MOM] Niech m, n będą dowolnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ jest liczbą całkowitą.
5. Uzasadnij, że najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $1, 2, ..., 2n$ jest podzielna przez $\binom{2n}{n}$.
6. [55OM] Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.
7. [56OM] Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których n^n+1 oraz $(2n)^{2n}+1$ są liczbami pierwszymi.
8. [57OM] Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki $a_1 = 1$, $a_{n+1} = d(a_n) + c$ dla $n = 1, 2, ...$, gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...$ jest okresowy.
9. [58OM] Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m) = F(n)$.
10. [58OM] Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

Permutacje

1. Udowodnij małe twierdzenie Fermata: jeśli p jest liczbą pierwszą, to $n^p \equiv n \pmod p$ dla wszystkich liczb całkowitych n.
2. [58OM] Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka permutacja $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$ zboru $\{1, 2, ..., p-1\}$, że liczby x_1, x_1x_2, $x_1x_2x_3$, ..., $x_1x_2...x_{p-1}$ dają różne reszty przy dzieleniu przez p.
3. [60OM] Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Niech $r_1, r_2, ..., r_{n-1}$ będą odpowiednio resztami z dzielenia liczb 1, $1+2$, $1+2+3$, ..., $1+2+...+(n-1)$ przez n. Znaleźć wszystkie takie wartości n, że ciąg $(r_1, r_2, r_3, ..., r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, 3, ..., n-1)$.
4. [60OM] Dana jest liczba pierwsza p. Po lewej stronie tablicy napisano liczby $1, 2, 3, ..., p-1$, zaś po prawej stronie liczbę 0. Wykonujemy ciąg $p-1$ ruchów, z których każdy przebiega następująco. Wybieramy jedną z liczb napisanych po lewej stronie tablicy, dodajemy ją do wszystkich pozostałych liczb na dablicy, po czym wymazujemy wybraną liczbę. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości p można w kolejnych ruchach wybierać liczby w taki sposób, by liczba pozostała na tablicy po wykonaniu wszystkich ruchów była podzielna przez p.

Reszty modulo

1. [55OM] Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie $(12x+5)(12y+7) = p^z$.
2. [57OM] Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których liczba $2^n + 105$ jest kwadratem liczby całkowitej.
3. [57OM] Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.
4. [59OM] Wyznaczyć najwiekszą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci $x^3 + 2y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y.

Algorytm Euklidesa

1. [59OM] Dana jest liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 3. Udowodnić, że istnieje liczba m o następującej włąsności: Każda liczba całkowita nie mniejsza niż m jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n.

Mateusz Kwaśnicki