Nierówności i równości cykliczne i symetryczne

Symetria

1. Udowodnij, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi $\dfrac{a^4+b^4}{a+b} + \dfrac{b^4+c^4}{b+c} + \dfrac{c^4+a^4}{c+a} \geq a^3+b^3+c^3$.

2. Udowodnij, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi $\dfrac{a+b+c}{2} \geq \dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a}$.

3. [56OM] Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$. Udowodnić, że $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leq 2$.

4. [57OM] Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca = abc$. Dowieść, że
$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1\,.$$

5. Udowodnij wprost (bez odwoływania się do nierówności o średnich), że dla $a, b, c > 0$ zachodzi
$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc.$$

6. Udowodnij, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi $\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

7. Udowodnij, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$ oraz że równość ma miejsce tylko gdy $a = b = c = 1$.

8. [55OM] Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to
$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geq \sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}\,.$$

9. [56OM] Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$ są dodatnie oraz
$$\sqrt{x_1^2+cx_1x_2+x_2^2} + \sqrt{x_2^2+cx_2x_3+x_3^2} + ...\sqrt{x_n^2+cx_nx_1+x_1^2} = \sqrt{c+2}(x_1+x_2+...+x_n)\,,$$
to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

10. [BMO 1996] Niech a, b, c, d będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $a+b+c+d = 12$ oraz $abcd = 27+ab+ac+ad+bc+bd+cd$. Znajdź wszystkie możliwe wartości a, b, c, d.

11. [BMO 2005] Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Dowieść, że
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\,.$$

12. [53OM] Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ i dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1, x_2, ..., x_n$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}$$
(przyjmujemy $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$ oraz $x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}$).

13. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Udowodnij, że $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$.

Czebyszewy

1. [BMO 2002] Udowodnij, że dla wszystkich $a, b, c \in (0, 1)$ zachodzi $\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{b}{1-b} + \dfrac{c}{1-c} \geq \dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$.

2. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich x, y, z zachodzi $(xy+yz+zx)\left(\dfrac{1}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{(y+z)^2} + \dfrac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \dfrac{9}{4}$.

3. Udowodnij, że dla wszystkich liczb dodatnich a, b, c zachodzi $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich a, b, c zachodzi $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$.

Łamanie symetrii

1. [56OM] Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$. Udowodnić, że $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

2. Udowodnij, że dla $a, b, c \in [0, 1]$ zachodzi
$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

3. [BMO 2004]
   (a) Wiedząc, że liczby rzeczywiste a, b, c spełniają $a + b + c = 0$, dowiedz, że
   $$a^3 + b^3 + c^3 > 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^5 + b^5 + c^5 > 0\,.$$
   (b) Wiedząc, że liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają $a + b + c + d = 0$, dowiedz, że
   $$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 > 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^5 + b^5 + c^5 + d^5 > 0\,.$$

4. [BMO 1995]
   (a) Znajdź największą wartość wyrażenia $x^2y - y^2x$ gdy $0 \leq x \leq 1$ oraz $0 \leq y \leq 1$.
   (b) Znajdź największą wartość wyrażenia $x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$ gdy $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

5. [BMO 1995] Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi $a < b < c$, $a + b + c = 6$ oraz $ab + bc + ca = 9$. Udowodnij, że $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.

6. [57OM] Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań
$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

7. [BMO 1999] Nieujemne liczby rzeczywiste p, q, r spełniają $p + q + r = 1$. Udowodnij, że $7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9pqr$.

Rozmaitości

1. [53OM] Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ zachodzi nierówność
$$x_1x_2...x_n + y_1y_2...y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot ... \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\,.$$

2. [55OM] Dana jest liczba całkowita $n \geq 5$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ układu równań
$$x_{i-2}^3 + x_{i-1}^3 + x_i^3 = x_i^4 + x_{i+1}^3 + x_{i+2}^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., n,$$
gdzie $x_{-1} = x_{n-1}, x_0 = x_n, x_1 = x_{n+1}, x_2 = x_{n+2}$.

3. [BMO 1993] Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $\frac{1}{3} \leq xy + yz + zx \leq 3$. Określ zbiór możliwych wartości wyrażeń xyz oraz $x + y + z$.

4. [BMO 1998] Znajdź rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$$
w którym x, y, z są dodatnie i udowodnij, że jest to jedyne takie rozwiązanie. Udowodnij ponadto, że istnieje rozwiązanie tego układu, w którym x, y, z są parami różnymi liczbami rzeczywistymi.

5. [BMO 2003] Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Udowodnij, że $x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$.

6. [54OM] Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy $A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ oraz $B = bcd + cda + dab + abc$. Udowodnić nierówność $(a + b + c + d)^3 \leq 4A + 24B$.

7. [57OM] Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = 3$. Dowieść, że $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9$.

Mateusz Kwaśnicki