Ułamki łańcuchowe

Ułamek $\frac{253}{48}$ zapisujemy w postaci ułamka łańcuchowego następująco:

$$\frac{253}{48} = 5 + \frac{13}{48} = 5 + \frac{1}{\frac{48}{13}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{9}{13}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{13}{9}}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{4}}}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}.$$

W skrócie pisze się:

$$\tfrac{254}{48} = [\tfrac{254}{48}] = [5 + \tfrac{13}{48}] = [5; \tfrac{48}{13}] = [5; 3 + \tfrac{9}{13}] = [5; 3, \tfrac{13}{9}] = [5; 3, 1 + \tfrac{4}{9}] = [5; 3, 1, \tfrac{9}{4}] = [5; 3, 1, 2 + \tfrac{1}{4}] = [5; 3, 1, 2, 4].$$

Zwróć uwagę na średnik w zapisie.

1. Rozwiń w ułamek łańcuchowy liczby $\frac{730}{81}$, $\frac{500}{32}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{355}{113}$. Rozwikłaj ułamek łańcuchowy $[0; 5, 10, 15]$.
2. Opisz (rekurencyjną) procedurę rozwijania dodatniej liczby wymiernej w ułamek łańcuchowy i uzasadnij, że procedura ta kończy się w skończonej liczbie kroków.
3. Co się dzieje, gdy w postaci ułamka łańcuchowego spróbujemy zapisać $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\sqrt{5}+1$?
4. Znajdź liczbę, która rozwijana w postaci ułamka łańcuchowego daje $[4; 1, 4, 1, 4, 1, 4, ...]$. Jaka liczba daje rozwinięcie $[3; 3, 3, 3, ...]$? A jaka $[1; 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$?
5. Zauważ, że $[a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, 1] = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n + 1]$, więc zapis w postaci ułamka łańcuchowego nie jest jednoznaczny. Czy są niejednoznaczności innego rodzaju?
6. Zapisz w postaci ułamka zwykłego ułamek łańcuchowy $[a_0; a_1, a_2, a_3]$.
7. Uzasadnij, że $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \dfrac{P_n(a_0, ..., a_n)}{Q_n(a_0, ..., a_n)}$, gdzie P_n i Q_n spełniają zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) &= x_0, & P_n(x_0, x_1, ..., x_n) &= x_0 P_{n-1}(x_1, ..., x_n) + Q_{n-1}(x_1, ..., x_n), \\ Q_0(x_0) &= 1, & Q_n(x_0, x_1, ..., x_n) &= P_{n-1}(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

8. Udowodnij, że $P_n(x_0, x_1, ..., x_n) = P_n(x_n, x_{n-1}, ..., x_0)$.
9. Niech $x_0, x_1, ...$ będą liczbami rzeczywistymi. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & p_n &= P_n(x_0, x_1, ..., x_n), \\ q_{-1} &= 0, & q_n &= Q_n(x_0, x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

   Udowodnij, że $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ $(n \geq 0)$, czyli innymi słowy (o ile nie dzielimy przez zero):

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}.$$

10. Wywnioskuj, że $\mathrm{NWD}(P_n(a_0, a_1, ..., a_n), Q_n(a_0, a_1, ..., a_n)) = 1$ ($a_0, a_1, ..., a_n$ — liczby całkowite).
11. Uzasadnij, że $[a_0; a_1, ..., a_n, x]$ (gdzie $a_1, a_2, ..., a_n$ są całkowite dodatnie, a_1 jest całkowita, x jest rzeczywista dodatnia) jest funkcją rosnącą x gdy n jest nieparzyste oraz funkcją malejącą x w przeciwnym przypadku.
12. Wywnioskuj, że (przy założeniach z poprzedniego zadania oraz $x \geq 1$) liczba $[a_0; a_1, ..., a_n, x]$ leży pomiędzy $[a_0; a_1, ..., a_n]$ oraz $[a_0; a_1, ..., a_n + 1]$ i jest od obu tych liczb oddalona o nie więcej niż $\frac{1}{Q_n(a_0, a_1, ..., a_n)^2}$.
13. Udowodnij, że
    - (a1) dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ i dowolnego a_0 całkowitego, liczba $[0; a_1, ..., a_n]$ jest wymierna;
    - (a2) dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, ...$ i dowolnego a_0 całkowitego, ciąg $[a_0; a_1, ..., a_n]$ jest zbieżny, a jego granica jest liczbą niewymierną;
    - (b1) dla dowolnej liczby wymiernej x istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, ..., a_n$ i liczba całkowita a_0 takie, że $x = [a_0; a_1, ..., a_n]$;
    - (b2) dla dowolnej liczby niewymiernej x istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, ...$ oraz liczba całkowita a_0 takie, że ciąg $[a_0; a_1, ..., a_n]$ dąży do x;
    - (c1) ciąg opisany w punkcie (b1) jest dany jednoznacznie, jeśli dodatkowo założymy że $a_n > 1$; w przeciwnym razie istnieją dwa takie ciągi;
    - (c2) ciąg opisany w punkcie (b2) jest dany jednoznacznie.

Mateusz Kwaśnicki

Odpowiedzi i wskazówki:

1. $\frac{730}{81} = [9; 81]$, $\frac{500}{32} = [15; 1, 1, 1, 2]$, $\frac{13}{21} = [0; 1, 1, 1, 1, 1, 2]$, $\frac{355}{113} = [3; 7, 16]$, $[0; 5, 10, 15] = \frac{151}{770}$.
2. $\frac{nq+r}{q} = n + \frac{1}{q/r}$, czyli $[\frac{nq+r}{q}] = [n; \frac{q}{r}]$. Wskazówka: uzasadnij, że mianownik się zmiejsza.
3. $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...]$, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, 1, 1, ...]$, $\sqrt{5} + 1 = [3; 4, 4, 4, ...]$.
4. Wskazówka: jeśli $x = [4; 1, 4, 1, 4, 1, 4, ...]$, to $x = 4 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ (lub inaczej $x = [4; 1, x]$); gdy $y = [3; 3, 3, 3, ...]$, to $y = [3, y] = 3 + \frac{1}{y}$; aby wyznaczyć $[1; 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$, znajdź najpierw $[1; 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$.
5. Jest to jedyna niejednoznaczność.
6. $\frac{1+a_0a_1+a_0a_3+a_2a_3+a_0a_1a_2a_3}{a_1+a_3+a_1a_2a_3}$.
8. Wskazówka: indukcja. Rozwiń P_{n+1}, skorzystaj z założenia indukcyjnego, rozwiń jeszcze raz P_n, skorzystaj z założenia indukcyjnego, zwiń P_n, skorzystaj po raz trzeci z założenia indukcyjnego, zwiń P_{n+1}.
11. Wskazówka: indukcja; $[a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, x] = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x}]$.
12. Wskazówka: zastosuj wynik zadania 9. dla ułamka łańcuchowego $[a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, 1]$ i wyznacz różnicę między $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Uwagi:

1. W rozwinięciu w ułamek łańcuchowy $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ liczby $a_0, a_1, ..., a_n$ muszą być całkowite, wszystkie oprócz a_0 muszą też być dodatnie. Natomiast sama notacja:

$$[x_0; x_1, x_2, ..., x_n] = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

   jest zdefiniowana dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_0, x_1, ..., x_n$, pod warunkiem, że nigdzie nie występuje dzielenie przez zero.

3. Sprawę zbieżności rozwinięcia w ułamek łańcuchowy liczb niewymiernych rozstrzyga ostatnie zadanie.
4. W miarę łatwo można udowodnić, że każda liczba o okresowym rozwinięciu w ułamek łańcuchowy jest *niewymiernością kwadratową*, tj. pierwiastkiem równania kwadratowego. Twierdzenie odwrotne też jest prawdziwe, ale sporo trudniejsze.

12. Ciekawy jest wniosek z tego zadania: liczby wymierne $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n]$ są przybliżeniami liczby $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ (o rozwinięciu skończonym lub nie) spełniającymi nierówność $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$. Są to w pewnym sensie najlepsze przybliżenia liczby x. Znajdź (posługując się kalkulatorem) pierwszych kilka wyrazów rozwinięcia w ułamek łańcuchowy liczby π i podaj kilka dobrych przylibżeń π przez liczby wymierne.