# Wielomiany o współczynnikach rzeczywistych

Wielomian: $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

- współczynniki wielomianu: $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$; wyraz wolny: $a_0$; notacja: $a_k = [W(x)]_k$
- stopień wielomianu: $n$ (gdy $a_n \neq 0$); wielomian stale równy 0 nie ma stopnia (czasem: ma stopień $-\infty$)
- pierwiastek: liczba $x$ taka, że $W(x) = 0$
- wielomian nierozkładalny: jeśli $W(x) = P(x)Q(x)$, to stopień $P$ lub $Q$ jest równy 0

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, $V(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$
(przyjmujemy $a_j = 0$ dla $j > n$, $b_j = 0$ dla $j > m$)

- $W(x) + V(x)$ ma współczynnik $a_k + b_k$ przy $x^k$
- $W(x) \cdot V(x)$ ma współczynnik $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$ przy $x^k$
- $W(x)$ dzielone przez $V(x)$ daje wynik $P(x)$ z resztą $R(x)$, jeśli:
  - $W(x) = P(x)V(x) + R(x)$
  - stopień $R(x)$ jest mniejszy niż stopień $V(x)$
- $\mathrm{NWD}(W(x), V(x))$ — największy wspólny dzielnik

Twierdzenia:

- twierdzenie „Bézouta”: jeśli $a$ jest pierwiastkiem $W(x)$, to $W(x)$ dzieli się przez $(x - a)$
- wielomian stopnia $n$ ma co najwyżej $n$ pierwiastków
- wzory Viète'a: wielomian $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)...(x - a_n)$ ma współczynnik przy $x^{n-k}$ równy
$$(-1)^k \sum a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_k},$$
gdzie dodaje się iloczyny dla wszystkich możliwych układów liczb $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_k \leq n$
- przez każde $n+1$ punktów na płaszczyźnie o różnych współrzędnych poziomych przechodzi wykres dokładnie jednego wielomianu stopnia $n$
- algorytm Euklidesa: jeśli $R(x)$ jest resztą z dzielenia $W(x)$ przez $V(x)$, to
$$\mathrm{NWD}(W(x), V(x)) = \mathrm{NWD}(R(x), V(x))$$
- rozszerzony algorytm Euklidesa: istnieją takie $P(x)$ i $Q(x)$, że
$$\mathrm{NWD}(W(x), V(x)) = P(x)W(x) + Q(x)V(x)$$
- każdy wielomian rozkłada się jednoznacznie na iloczyn wielomianów nierozkładalnych
- zasadnicze twierdzenie algebry: tylko wielomiany stopnia 0, 1 i wielomiany stopnia 2 o ujemnym wyróżniku są nierozkładalne
- twierdzenie Abela: nie ma wzorów na pierwiastki wielomianów stopnia większego niż 4
dla stopnia 2 jest to znany wzór z „deltą”, dla stopnia 3 i 4 — wzory Cardano (współpraca: Ferrari, del Ferro, Tartaglia; XVI wiek)

# Wielomiany o współczynnikach całkowitych

- pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$ (gdzie $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$) spełnia $p|a_0$, $q|a_n$
- $k - l|W(k) - W(l)$
- dzielenie z resztą i NWD prowadzą do wielomianów o współczynnikach wymiernych
- wielomian moniczny — jeśli $a_n = 1$; dzielenie z resztą przez wielomian moniczny daje iloraz i resztę o współczynnikach całkowitych
- kryterium Eisensteina: jeśli $p$ — liczba pierwsza, $p|a_j$ dla $j < n$, $p \not| a_n$, to $W(x)$ jest nierozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych
- lemat Gaussa: jeśli liczba pierwsza $p$ dzieli współczynniki $W(x)V(x)$, to dzieli współczynniki $W(x)$ lub współczynniki $V(x)$
- twierdzenie Gaussa: jeśli $W(x)$ jest nierozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych, to jest również nierozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych
- małe twierdzenie Fermata: jeśli $p$ jest liczbą pierwszą, to $p|n^{p-1} - 1$ dla każdego całkowitego $n \geq 0$ niepodzielnego przez $p$

# Zadania

1. Znajdź wszystkie wielomiany stopnia 3, mające pierwiastki 1, $\sqrt{2}$ i $\pi$.
2. Znajdź wielomiany stopnia 3, mające pierwiastki jak wyżej i przyjmujące w 7 wartość 1.
3. Znajdź wielomiany $W(x)$ stopnia 3, mające pierwiastki $\sqrt{2}$, $\pi$ i takie, że $W(1) = A$, $W(7) = B$.
4. Znajdź wielomiany $W(x)$ stopnia 3, dla których $W(a) = A$, $W(b) = B$, $W(c) = C$, $W(d) = D$.
5. Znajdź wszystkie wielomiany $W(x)$, które spełniają powyższe równości.
6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ przez $x - 1$, $x - 2$ oraz $x + 1$. Ile wynosi $W(1)$, $W(2)$, $W(-1)$?
7. Wyznacz możliwie najszybciej resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^7 - 3x^6 + x^3 + 2x^2 + 3$ przez $V(x) = x - 2$.
8. Niech $W(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x + 2$, $V(x) = x^2 + x - 2$. Podziel $W(x)$ przez $V(x)$ z resztą.
9. Nie korzystając z wyników poprzedniego zadania, policz wartość reszty dla $x = 1$ i $x = -2$.
10. Znajdź wielomiany stopnia 1, które dla $x = 1$ i $x = -2$ mają wartości takie, jak znalezione powyżej.
11. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{1000}$ przez $V(x) = x^2 - 3x + 2$.
12. Czy metoda użyta do rozwiązania poprzedniego zadania zadziała dla $V(x) = x^2 - 2x + 1$? A dla $V(x) = x^2 + 1$?
13. Znajdź wielomian możliwie najniższego stopnia, który przy dzieleniu przez $x^2 + 1$ daje resztę $x$, a przy dzieleniu przez $x^2 - 1$ — resztę 1.
14. Znajdź $\mathrm{NWD}(W(x), V(x))$, gdzie $W(x) = x^4 + x^2 + x - 1$, $V(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$. Znajdź $P(x)$ i $Q(x)$ takie, że $\mathrm{NWD}(W(x), V(x)) = P(x)W(x) + Q(x)V(x)$.
15. Wymnóż $(x - a)(x - b)(x - c)$ oraz $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$.
16. Załóżmy, że wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ ma $n$ pierwiastków. Wyraź
    (a) sumę pierwiastków;
    (b) iloczyn pierwiastków;
    (c) sumę kwadratów pierwiastków;
    (d) sumę trzecich potęg pierwiastków;
    (e) sumę odwrotności pierwiastków

    za pomocą $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.
17. Udowodnij, że jeśli wielomian $W(x)$ jak wyżej ma $n$ pierwiastków rzeczywistych, to $a_{n-2} \leq \frac{n-1}{2n} a_{n-1}^2$.

# Zadania z niedawnych olimpiad

## Współczynniki

1. [50OM] Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mające dokładnie $n$ pierwiastków nie większych niż $-1$ oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}.$$

Rozwiązanie: Niech $(-x_j)$ będą tymi pierwiastkami ($x_j \geq 1$), $G$ — iloczynem $x_j$, $S$ — sumą, a $H$ — sumą odwrotności. Otrzymujemy $G^2 + GH = 1 + GS$, czyli $S - H = G - \frac{1}{G}$. Sprawdzamy, że gdy $a, b \geq 1$, to $(a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b}) = ab - \frac{1}{ab} - (2 - \frac{2}{ab}) \leq ab - \frac{1}{ab}$, skąd indukcyjnie $S - H \leq G - \frac{1}{G}$. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = ... = 1$. Jest więc jeden taki wielomian: $(x + 1)^n$.

2. [51OM] Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego $x$

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość

$$P(x) = x.$$

Rozwiązanie: Zachodzi $|P(x)| = |P(-x)|$, zatem współczynniki wielomianu $P$ przy parzystych potęgach $x$ są równe zero. Ponadto w wielomianie $P(x^2 - 1)$ współczynniki przy nieparzystych potęgach $x$ są równe 0. Wobec tego — indukcyjnie — współczynniki przy kolejnych nieparzystych potęgach $x$, od trzeciej począwszy, muszą być równe zero.

3. [52OM] Niech $n - 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + ... + a_1x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż $n$ pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie: Gdyby wielomian ów miał $n$ pierwiastków $(-x_j)$, to suma $x_j$ i suma iloczynów $x_ix_j$ $(i \neq j)$ byłyby obie równe zero, a stąd również suma kwadratów $x_j$ byłaby równa zero.

4. [54OM] Znaleźć wszystkie wielomiany $W$ o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x+y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie: Wielomian $W(q+x)+W(q-x)$ przyjmuje tylko wartości wymierne, więc jest stały. Wobec tego $W(q+x)$ ma niezerowe współczynniki tylko przy nieparzystych potęgach, pomijając wyraz wolny. Gdyby był stopnia większego niż 1, to otrzymalibyśmy sprzeczność, biorąc dwie różne wartości $q$. Zatem $W(x) = (W(1) - W(0))x + W(0)$.

5. [55OM] Niech $c$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$ ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Wyznaczyć, w zależności od $c$, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

Rozwiązanie: $Q(x) = P(x)P(-x)$.

6. [59OM] Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ spełniona jest równość

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

Rozwiązanie: Jeśli $W(x)$ jest wielomianem stopnia $n$, to po pierwsze współczynnik przy $x^n$ musi być równy 1, a po drugie — indukcyjnie, począwszy od $n-1$ w dół — wszystkie pozostałe współczynniki muszą się zerować. Stąd $W(x) = x^n$. Należy jeszcze dodać wielomian stale równy 0.

## Pierwiastki, wielomiany przechodzące przez dane punkty

1. [48OM] Wielomian $P(x)$ stopnia $n$ spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, 4, 8, ..., 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

Rozwiązanie: Wielomian $1 - xP(x)$ ma pierwiastki w punktach $1, 2, 4, 8, ..., 2^n$ i wartość 1 w punkcie 0. Stąd

$$1 - xP(x) = \frac{(1-x)(2-x)(4-x)(8-x)...(2^n - x)}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2^n}.$$

Współczynnik przy $x$ po prawej stronie to liczba przeciwna do

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n},$$

i taka jest wobec tego wartość $P(0)$.

2. [48OM] Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

   Rozwiązanie: Niech $P(x) = -(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)Q(x)$. Aby $P(x) = -5^m$, liczby $|x-k_j|$ muszą być potęgami 5. Gdyby istniała druga taka liczba $y$, to $|x-y|$ dałoby się przedstawić jako suma $5^a + 5^b$ lub różnica $\left|5^a - 5^b\right|$ na trzy sposoby, a to jest niemożliwe, bowiem jeśli $5^a + 5^b = 5^A + 5^B$, to $\{a, b\} = \{A, B\}$ i podobnie dla różnicy, i wreszcie $5^a + 5^b \neq 5^A - 5^B$.

3. [57OM] Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych $a, b$, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1x + c_0$, gdzie każda z liczb $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ jest równa 1 lub $-1$.

   Rozwiązanie: Musi być $b = -1$ lub $b = 1$. Iloczyn nie ma pierwiastków o wartości bezwzględnej większej lub równej 2, bowiem

$$\left|x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1x + c_0\right| \geq |x|^n - |x|^{n-1} - ... - |x| - 1.$$

   Wobec tego $x^2 + ax + b$ też nie ma takich pierwiastków, czyli $4 + 2a + b > 0$ oraz $4 - 2a + b > 0$. Zostaje osiem par do sprawdzenia, każda spełnia warunki zadania.

## Dzielenie z resztą

1. [47OM] Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

   Rozwiązanie: Niech $k$ będzie pierwiastkiem całkowitym tego wielomianu. Wielomian można zapisać w postaci $(x-1)((x-11)P(x) + 990) + 101$, skąd $(k-1)|101$, czyli $k \in \{-100, 0, 2, 102\}$. Można go również przedstawić w postaci $(x-11)((x-1)P(x) + 990) + 10001$, skąd z kolei $(k-11)|10001$. Ale żadna z liczb $-111$, $-11$, $-9$, 91 nie jest dzielnikiem 10001. Zatem szukane $k$ nie istnieje.

2. [47OM] Wyznaczyć wszystkie pary $(n, r)$, gdzie $n$ jest liczbą całkowitą dodatnią, $r$ zaś liczbą rzeczywistą, dla których wielomian $(x+1)^n - r$ jest podzielny przez wielomian $2x^2 + 2x + 1$.

   Rozwiązanie: Reszta z dzielenia wielomianu $(x+1)^n$ przez $2x^2 + 2x + 1$ — oznaczmy ją przez $a_nx + b_n$ – spełnia $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}a_n$. Łatwo zauważyć, że $a_n = 0$ tylko dla parzystych $n$, i wtedy $b_n = (-\frac{1}{2})^{n/2}$. Zatem szukane pary to $(n, (-\frac{1}{2})^{n/2})$, gdzie $n$ jest dowolną parzystą liczbą dodatnią.

## Zadania z serii $k - l|P(k) - P(l)$

1. [46OM] Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, a liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.

   Rozwiązanie: $5|P(7) - P(2)$ oraz $2|P(7) - P(5)$.

2. [49OM] Niech $g(k)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby całkowitej $k$, gdy $|k| > 2$, oraz niech $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian $W$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, dla którego zbiór liczb postaci $g(W(x))$ ($x$ — całkowite) jest skończony.

   Rozwiązanie: Jeśli $W(0) = 0$, to $x|W(x)$. Jeśli $W(0) \neq 0$, to dla każdego $k$ zachodzi $W(kW(0)) = W(0)(1 + jk)$ dla pewnego $j$. Załóżmy, że zbiór liczb postaci $g(W(x))$ jest skończony, a więc jest skończenie wiele różnych liczb pierwszych $p_1, p_2, ..., p_n$ będących dzielnikami liczb $W(x)$. Wobec tego

$$W(kp_1p_2...p_nW(0)) = W(0)(1 + jkp_1p_2...p_n),$$

   gdzie $j$ zależy od $k$. Ponieważ liczby $W(x)$ nie mają innych czynników pierwszych niż $p_1, p_2, ..., p_n$, otrzymujemy $j = 0$. Wobec tego wartość $W(0)$ jest przyjmowana przez $W$ nieskończenie wiele razy, czyli $W$ jest stały wbrew założeniu. Zatem rozważany zbiór jest zawsze skończony.

3. [54OM] Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W$ o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

   Rozwiązanie: Dla dowolnych $n, k$ zachodzi $k|W(n+k) - W(n)$. Gdy $k$ jest dzielnikiem $W(n)$, to otrzymujemy $k|W(n+k)$, czyli $k|2^{n+k} - 2^n$. Gdy $k$ jest nieparzyste, to wynika stąd, że $k|2^k - 1$. Stąd zaś wynika, że $k$ nie jest liczbą pierwszą. Oznacza to, że żadna liczba pierwsza nie dzieli $W(n)$, skąd $W(x) = 1$ lub $W(x) = -1$.

4. [55OM] Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), ..., W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej $a$ wszystkie liczby $W_1(a)$, $W_2(a)$, $W_3(a)$, ..., $W_n(a)$ są złożone.

   Rozwiązanie: Niech $b$ będzie taka, że wszystkie liczby $W_j(b)$ są różne od 1, 0 i 1. Niech $c$ będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością tych liczb. Wtedy $W_j(b)|W_j(b + kc)$ dla dowolnego $k$. Wystarczy wziąć $a = b + kc$ dla $k$ tak dużego, by wszystkie $W_j(a)$ były różne od $W_j(b)$, 0 oraz $-W_j(b)$.

## Zadania rozmaite

1. [47OM] Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

   Rozwiązanie: Nie: każda trzecia potęga wielomianu zmiennej $x$ o współczynnikach całkowitych ma współczynnik przy $x$ podzielny przez 3 i własność tę będzie miała w takim razie suma dowolnie wielu trzecich potęg.

2. [51OM] Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla liczb całkowitych $x$ wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

   Rozwiązanie: Niech $w(x) = ax^2 + bx + c$, $k_n = \sqrt{w(n)}$. Wówczas

$$\sqrt{a} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{w(n+1)} - \sqrt{w(n)})$$

   jest liczbą całkowitą, czyli $a = p^2$, i ponadto $w(n) = (pn+q)^2$ dla pewnego $q$ dla wszystkich dostatecznie dużych $n$. Wobec tego $w(n) = (pn+q)^2$ dla wszystkich $n$.

3. [53OM] Dowieść, że wykres wielomianu $W(x)$ stopnia większego od 1 ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że $W(x) = F(G(x))$, przy czym $G(x)$ jest stopnia 2.

   Rozwiązanie: Gdyby oś była niepionowa i miała równanie $y = ax + b$, to $W(x) - ax + c$ musiałoby mieć nieparzyście wiele rozwiązań dla każdego $c$, a więc $W$ musiałby mieć stopień nieparzysty, i podobnie $W(x) + \frac{1}{a}x + c$ musiałoby mieć parzyście wiele rozwiązań dla każdego $c$ (prawie — poza skończoną liczbą wartości $c$), czyli $W$ musiałby mieć parzysty stopień. Sprzeczność. Wobec tego prosta jest pionowa i bez straty ogólności możemy założyć, że $W$ jest parzysty, czyli $W(x) = F(x^2)$ dla pewnego wielomianu $F$.

4. [54OM] Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych $a, b$ spełniajacych równanie $W(a) = W(b)$.

   Rozwiązanie: Zachodzi $P(x) = W(x+1) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x - 6$. Stąd $P(n) - P(-n) = 2n^3 - 8n = 2n(n^2-4) > 0$ dla $n \geq 3$ oraz $P(-n) - P(n-1) = 2n^3 - 3n^2 + 13n - 6 > 0$ gdy $n \geq 2$. Pozostaje kilka wartości do sprawdzenia.

5. [55OM] Niech $W$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian $W$ przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

   Rozwiązanie: Jeśli mamy już $n \geq 2$ takich liczb $x_1, x_2, ..., x_n$, to wystarcza, że kolejna spełnia np. $W(x_{n+1}) \equiv W(x_2) \pmod{W(x_1)}$ oraz $W(x_{n+1}) \equiv W(x_1) \pmod{x_k}$ dla $k = 2, 3, ..., n$. Do tego wystarcza, aby $x_{n+1} \equiv x_2 \pmod{W(x_1)}$ oraz $x_{n+1} \equiv x_1 \pmod{W(x_k)}$ dla $k = 2, 3, ..., n$. Takie $x_{n+1}$ (do tego różne od $x_1, x_2, ..., x_n$) istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

6. [56OM] Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek: *Dla każdej liczby pierwszej $p$ istnieje taka liczba całkowita $k$, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez $p$.* Dowieść, że istnieje liczba całkowita $m$, dla której $W(m) = W(m+1) = 0$.

   Rozwiązanie: Jeśli $p|W(x)$ i $p|W(x+1)$, to $p|2x + a + 1$, czyli $x = \frac{kp-a-1}{2}$. Zachodzi $p|4W(x)$, zatem $(a+1)^2 - 2a(a+1) + 4b$. Otrzymujemy $4b = a^2 - 1$, skąd $a = 2n+1$, $b = n(n+1)$, $W(x) = x^2 + (2n+1)x + n(n+1) = (x+n)(x+n+1)$.

7. [58OM] Wielomian $W$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a; b\rangle$ (gdzie $a < b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany $P$ oraz $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, że

$$W(x) = (P(x))^2 + (x-a)(b-x)\sum_{i=1}^{m}(Q_i(x))^2$$

   dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

   Rozwiązanie: Indukcja względem stopnia $W$. Gdy $W(x) = c$ to $W(x) = (\sqrt{c})^2 + 0(x-a)(b-x)$. Załóżmy, że $W$ ma stopień $n > 0$. Niech $c$ będzie największą taką liczbą, że $W(x) - c(x-a)(b-x)$ jest nieujemne w $\langle a; b\rangle$. Wówczas $W(x) - c(x-a)(a-b) = (x-x_1)^2...(x-x_k)^2V(x)$ dla pewnego wielomianu $V$ stopnia niższego niż stopień $W$ i spełniającego warunki zadania. Pozostaje skorzystać z założenia indukcyjnego.

8. [58OM] Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

   Rozwiązanie: Niech $x$ będzie owym wspólnym pierwiastkiem. Wówczas $P(0)$ jest całkowite, $P(P(0)) = P(P(P(x))) = 0$ i $P(P(P(P(0)))) = P(P(0)) = 0$.