Analiza matematyczna 2 — egzamin

imię i nazwisko, numer indeksu

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

(1) Sformułuj kryterium Leibniza zbieżności szeregu naprzemiennego. (5 p.)

Jeśli (a_n) jest malejący i zbieżny do zera, to $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ jest zbieżny.

(2) Czy istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $f(t) = \lfloor t \rfloor$? Sformułuj wykorzystane twierdzenie. (6 p.)

Nie: wielomiany są ciągłe, zaś funkcja f nie jest ciągła. Wykorzystujemy to następujące twierdzenie: granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

(3) Czy istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $g(t) = \sqrt[3]{t}$? Sformułuj wykorzystane twierdzenie. (6 p.)

Tak: funkcja g jest ciągła. Teza zadania wynika z twierdzenia Weierstrassa: każda funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.

(4) Zapisz szereg Fouriera funkcji 2π-okresowej $f(t)$ (ze wzorem na współczynniki). (5 p.)

Szereg Fouriera funkcji f to $f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$, gdzie dla $n \geq 1$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

(5) Funkcja 2π-okresowa $f(t)$ dana jest wzorem $f(t) = \sqrt{t}$ dla $t \in [0,\pi]$ oraz $f(t) = 0$ dla $t \in (-\pi, 0)$. Wyznacz sumę szeregu Fouriera funkcji f dla $t = 0$ oraz $t = \pi$. Naszkicuj wykres f oraz sumy jej szeregu Fouriera. (8 p.)

W otoczeniu $t = 0$ funkcja f spełnia warunek Höldera: $|f(t) - f(0)| \leq |t|^{1/2}$, zatem jej szereg Fouriera jest zbieżny do $f(0) = 0$.

W punkcie $t = \pi$ istnieją granice jednostronne pochodnych funkcji f: $\lim_{t\to\pi^-} f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\lim_{t\to\pi^+} f'(t) = 0$, a więc szereg Fouriera f jest zbieżny do średniej artymetycznej granic jednostronnych funkcji f. Ponieważ $\lim_{t\to\pi^-} f(t) = \sqrt{\pi}$ oraz $\lim_{t\to\pi^+} f(t) = 0$, sumą szeregu Fouriera funkcji f w tym punkcie jest $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

(6) Uzasadnij, że funkcja $H(p) = \int_0^\pi \sin(p\sin(t))dt$ (*funkcja Struve'a*) jest różniczkowalna. Sformułuj wykorzystane twierdzenie. (8 p.)

Twierdzenie: Jeśli pochodna cząstkowa $f'_p(t,p)$ istnieje i jest funkcją ciągłą dwóch zmiennych: $t \in [a,b]$, $p \in [\alpha,\beta]$ oraz $F(p) = \int_a^b f(t,p)dt$ jest poprawnie określona dla pewnego $p \in [\alpha,\beta]$, to $F(p)$ jest poprawnie określona dla $p \in [\alpha,\beta]$, $F(p)$ jest różniczkowalna w $[\alpha,\beta]$ oraz $F'(p) = \int_a^b f'_p(t,p)dt$.

Funkcja $h(t,p) = \sin(p\sin(t))$ oraz jej pochodna cząstkowa $h'_p(t,p) = \cos(p\sin(t))\sin(t)$ są ciągłymi (bo elementarnymi) funkcjami dwóch zmiennych: $p \in \mathbb{R}$ oraz $t \in [0,\pi]$. W szczególności $H(p)$ jest poprawnie określona (dla dowolnego p). Z ciągłości h'_p na $[0,\pi] \times [\alpha,\beta]$ wynika różniczkowalność $H(p)$ na $[\alpha,\beta]$ dla dowolnych α,β — a więc różniczkowalność na $\mathbb{R}$ (oraz możliwośc zamiany kolejności całkowania względem t i różniczkowania względem p).

Część rachunkowa

W części rachunkowej nie trzeba formułować wykorzystywanych twierdzeń

(7) Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$. (8 p.)

Całka $\int_{0+}^{1} \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$ jest zbieżna na mocy kryterium ilorazowego: $\frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t}}/t^{-1/3} \to 1$ gdy $t \to 0^+$, zaś $\int_{0+}^{1} t^{-1/3} = \frac{3}{2}$ jest zbieżna. Całka $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$ jest zbieżna na mocy kryterium Dirichleta: $\int \cos(t)dt = \sin(t) + C$ jest funkcją ograniczoną, zaś $1/\sqrt[3]{t}$ jest zbieżną do zera funkcją malejącą.

(8) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_n \frac{6^n n!(2n)!}{(3n)!}$. (6 p.)

Gdy $n \to +\infty$, mamy $\frac{6^{n+1}(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} / \frac{6^n n!(2n)!}{(3n)!} = \frac{6(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \to \frac{6\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{8}{9} < 1$. Wobec kryterium d'Alemberta rozważany szereg (o wyrazach nieujemnych) jest więc zbieżny.

(9) Oblicz całkę Riemanna–Stieltjesa $\int_0^1 f(t)dg(t)$, jeśli $f(t) = \sqrt{t}$ oraz $g(t) = t^3$. (6 p.)

Ze wzoru $\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt$ wynika, że w omawianym tu przypadku $\int_0^1 f(t)dg(t) = \int_0^1 \sqrt{t}\cdot 3t^2 dt = 3\int_0^1 t^{5/2}dt = \frac{6}{7}$.

(10) Oblicz pierwsze trzy wyrazy szeregu potęgowego funkcji $\dfrac{2+t-t^2+\ldots}{2-t+2t^2+\ldots}$ (przyjmując, że we wzorze tym licznik i mianownik są szeregami potęgowymi o dodatnich promieniach zbieżności). (6 p.)

Jeśli ten szereg to $a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots$, *to* $2+t-t^2+\ldots=(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots)(2-t+2t^2+\ldots)=2a_0+(2a_1-a_0)t+(2a_2-a_1+2a_0)t^2+\ldots$, *skąd kolejno* $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=-1$.

(11) Sprawdź, czy istnieje granica podwójna $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, jeśli $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$. (8 p.)

Nie: gdy $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=0$, *to* $f(x_n,y_n)=0$ *ma granicę* 0, *gdy zaś* $x_n=y_n=\frac{1}{n}$, *to* $f(x_n,y_n)=\frac{1}{3}$ *ma granicę* $\frac{1}{3}$, *co oznacza, że nie zachodzi warunek z definicji Heinego granicy podwójnej.*

(12) Znajdź wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x,y)=4x-3x^3-3xy^2$ w kole jednostkowym, danym nierównością $x^2+y^2\leq 1$. (10 p.)

Pochodne cząstkowe f *to* $f'_x(x,y)=4-9x^2-3y^2$ *oraz* $f'_y(x,y)=6xy$. *Przyrównując je do zera, otrzymujemy* $x=0$ *lub* $y=0$, *co daje dwa punkty podejrzane* $(0,\pm\frac{2}{\sqrt{3}})$ *poza kołem oraz dwa punkty podejrzane w kole:* $f(\pm\frac{2}{3},0)=\pm\frac{16}{9}$. *Wartości na brzegu:* $g(t)=f(\cos(t),\sin(t))=\cos(t)$ *są ograniczone przez* -1 *i* 1. *Zatem wartość największa to* $f(\frac{2}{3},0)=\frac{16}{9}$, *najmniejsza to* $f(-\frac{2}{3},0)=-\frac{16}{9}$.

Część problemowa

(13) Ciąg funkcji ciągłych (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na przedziale $[A, B]$. Ciągi liczbowe (a_n) i (b_n) są zbieżne do a i b; zakładamy przy tym, że $A \le a_n < b_n \le B$ oraz $A \le a < b \le B$. Udowodnij, że ciąg liczbowy o wyrazach $I_n = \int_{a_n}^{b_n} f_n(t)dt$ jest zbieżny do $I = \int_a^b f(t)dt$. (8 p.)

Zachodzi:

$$\begin{aligned}|I_n - I| &= \left|\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_{a_n}^{a} f_n(t)dt + \int_a^b (f_n(t) - f(t))dt + \int_b^{b_n} f_n(t)dt\right| \\ &\le \left|\int_{a_n}^{a} f_n(t)dt\right| + \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))dt\right| + \left|\int_b^{b_n} f_n(t)dt\right| \\ &\le |a - a_n|\|f_n\| + (b-a)\|f_n - f\| + |b_n - b|\|f_n\|.\end{aligned}$$

Skoro $|a - a_n|$, $|b_n - b|$ oraz $\|f_n - f\|$ dążą do zera, zaś $\|f_n\| \le \|f\| + \|f_n - f\|$ jest ciągiem ograniczonym, $|I_n - I|$ jest zbieżny do zera.

(14) Zachodzi:

$$\int_{0^+}^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_{0^+}^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n(-\ln(t))\right) dt \overset{??}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 t^n(-\ln(t))dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pierwsza równość to po prostu wzór na sumę szeregu geometrycznego. Przedostatnia to nietrudny rachunek. Ostatnia zaś to wzór udowodniony na wykładzie. Uzasadnij wyłącznie drugą równość, tzn. wykaż, że całkowanie wyraz po wyrazie w powyższym rachunku jest uprawnione. (10 p.)

Niech $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Szereg potęgowy $\sum_n t^n$ ma promień zbieżności 1, zatem jest zbieżny jednostajnie na $[\delta, 1-\delta]$. Oznacza to, że szereg $\sum_n t^n(-\ln(t))$ jest zbieżny jednostajnie na $[\delta, 1-\delta]$, a więc:

$$\int_\delta^{1-\delta}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n(-\ln(t))\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\delta^{1-\delta} t^n(-\ln(t))dt\right). \tag{1}$$

Pozostaje wykazać, że obie strony mają odpowiednią granicę gdy $\delta \to 0^+$.

Lewa strona (1) to całka $\int_\delta^{1-\delta} \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$. Funkcja podcałkowa rozszerza się do funkcji ciągłej w 1, bowiem $\lim_{t\to 1}\frac{-\ln(t)}{1-t} = \lim_{t\to 1}\frac{-1/t}{-1} = 1$ na mocy reguły de l'Hospitala. Ponadto $0 \le \frac{-\ln(t)}{1-t} \le -2\ln(t)$ dla $t \in (0, \frac{1}{2}]$, zaś $\int_{0^+}^1 (-\ln(t))dt = (1 - 1\ln(1)) - \lim_{t\to 0^+}(t - t\ln(t)) = 1$ jest zbieżna, zatem na mocy kryterium porównawczego całka niewłaściwa $\int_{0^+}^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ jest zbieżna. Oznacza to, że granicą lewej strony (1) jest lewa strona dowodzonej równości.

Z kolei różnica między prawą stroną (1) oraz prawą stroną dowodzonej równości to $R_\delta = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^\delta t^n(-\ln(t))dt + \int_{1-\delta}^1 t^n(-\ln(t))dt\right)$. Na mocy nierówności $-\ln(t) \le 1-t$ zachodzi więc:

$$\begin{aligned}0 \le R_\delta &\le \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{0^+}^\delta \delta^n(-\ln(t))dt + \int_{1-\delta}^1 t^n(1-t)dt\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\delta^n\right)\int_{0^+}^\delta(-\ln(t))dt + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{1-\delta}^1 t^n dt - \int_{1-\delta}^1 t^{n+1}dt\right) \\ &= \frac{1}{1-\delta}\left((\delta - \delta\ln(\delta)) - \lim_{t\to 0^+}(t - t\ln(t))\right) + \int_{1-\delta}^1 t^0 dt \\ &= \frac{\delta - \delta\ln(\delta)}{1-\delta} + \delta.\end{aligned}$$

Prawa strona dąży do zera gdy $\delta \to 0^+$.