Analiza matematyczna 2: pierwsze kolokwium

(1) Czy szereg $\sum_n \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$ jest zbieżny?

(2) Czy szereg $\sum_n \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ jest zbieżny?

(3) Czy całka $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}\,dt$ jest zbieżna?

(4) Czy ze zbieżności całki $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ wynika zbieżność całki $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+(f(t))^2}\,dt$?
Rozważ dwa przypadki: (a) $f(t) \geq 0$ dla wszystkich t; (b) $f(t)$ dowolne.

(5) Niech $f(t) = 0$ dla t wymiernych oraz $f(t) = 1$ dla t niewymiernych. Sprawdź (z definicji), że nie istnieje całka Riemanna–Stieltjesa $\int_0^1 t\,df(t)$.

Wskazówka: rozważ wpierw podziały składające się wyłącznie z punktów wymiernych, a następnie podziały składające się wyłącznie z punktów niewymiernych (z wyjątkiem końców 0 i 1).

Szkice rozw.:

(1) d'Alembert: $\frac{(2n+2)!\,(3n+3)!}{(n+1)!\,(4n+4)!} \Big/ \frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \to$

$\xrightarrow{n\to+\infty} \frac{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3}{1\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 < 1$, szereg zbieżny

lub: $\frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!} = \frac{2n\,(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{4n\,(4n-1)(4n-2)\cdots(3n+1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ i kryt. porównawcze

(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1/e^{\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{\sqrt{t}}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{4t^{3/2}}{e^{\sqrt{t}}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{4\cdot3\cdot t}{e^{\sqrt{t}}} \overset{H}{=}$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{4\cdot3\cdot2\cdot t^{\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{t}}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{e^{\sqrt{t}}} = 0$ i kryt. ilorazowe

lub: $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{e^{\sqrt{n}/4}}\right)^4 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}/4}\right)^4 = \frac{256}{n^2}$ i kryt. porównawcze

lub: kryt. zagęszczania i kryt. Cauchy'ego:

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{e^{\sqrt{2^n}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e^{2^{n/2}/n}} = 0$ (bo $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n/2}}{n} = +\infty$), więc

$\sum_n \frac{2^n}{e^{\sqrt{2^n}}}$ – zbieżny, więc $\sum_n \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ – zbieżny

(3) $\int_{0^+}^1$ zbieżna: $\lim_{t\to0^+} \frac{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{t}}} = \lim_{t\to0^+} \frac{\cos(t)}{t^{1/6}+1} = 1$ i kryt. ilorazowe

(lub: $\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} \leq \frac{1}{0+\sqrt[3]{t}}$ i kryt. porównawcze)

$\int_1^{+\infty}$ zbieżna: $\int \cos(t)\,dt$ – ogr., $\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$ – malejąca do 0 i kryt. Dirichleta

(4)(a) Tak: $\frac{f(t)}{1+(f(t))^2} \leq f(t)$ i kryt. porównawcze

(b) Nie: $f(t) = \begin{cases} 1-\frac{1}{n} & \text{gdy } t \in [n, n+\frac{1}{n}) \\ -\frac{1}{n} & \text{gdy } t \in [n+\frac{1}{n}, n+1) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$

$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \ldots = 0$, skąd Takro (...) $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ – zbieżna

$$\frac{f(t)}{1+(f(t))^2} = \begin{cases} \frac{n^2-n}{2n^2-2n+1} & \text{gdy } t \in [n, n+\frac{1}{n}) \\ -\frac{n}{n^2+1} & \text{gdy } t \in [n+\frac{1}{n}, n+1) \end{cases}$$

$$\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{1+(f(t))^2}\,dt = \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2-n}{2n^2-2n+1} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n^2+1} = (n-1)\left(\frac{1}{2n^2-2n+1} - \frac{1}{n^2+1}\right) = -\frac{(n-1)(n^2-2n)}{(2n^2-2n+1)(n^2+1)},$$

$\sum_n \left(-\frac{(n-1)(n^2-2n)}{(2n^2-2n+1)(n^2+1)}\right)$ rozb. do $-\infty$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n-1)(n^2-2n)}{(2n^2-2n+1)(n^2+1)}}{1/n} = \frac{1}{2}$: kryt. ilorazowe

Zatem $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{1+(f(t))^2}\,dt$ – rozb. (do $-\infty$)

(5) Sumy całkowe R-S w pierwszym przypadku są równe 0, w drugim:

$$s_1^{(n)}\cdot(t_1^{(n)} - t_0^{(n)}) + s_k^{(n)}(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) = s_1^{(n)}\cdot 1 + s_k^{(n)}\cdot(-1) \xrightarrow{n\to+\infty} 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1.$$