Analiza matematyczna 2: drugie kolokwium

(1) Zbadaj zbieżność jednostajną szeregu funkcji:

$$\sum_n \frac{n^2+t^2}{n^4+t^4}\,.$$

(2) Uzasadnij, że:

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2(2n)!}\,.$$

(3) Dla $p>0$ niech:

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{p+t}\,dt.$$

Uzasadnij, że F jest różniczkowalna. Sprawdź ponadto, że zachodzi:

$$F'(p) = F(p) - \frac{1}{p}\,.$$

(4) Oblicz:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin(t))dt.$$

Wskazówka: jeśli $f(t,p) = e^{p\cos(t)}\cos(p\sin(t))$, *to zachodzi:*

$$\int f'_p(t,p)dt = \frac{1}{p}\left(e^{p\cos(t)}\sin(p\sin(t))\right) + C$$

(nie sprawdzaj tego wzoru).

(5) Niech $a>0$. Zapisując $\dfrac{1}{1-t^2}$ jako sumę szeregu geometrycznego i całkując odpowiedni szereg wyraz po wyrazie, wyprowadź wzór:

$$\int_0^1 \frac{1-t^a}{1-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+a+1}\right).$$

Uzasadnij, że w istocie można całkować wyraz po wyrazie, wykorzystując *twierdzenie Diniego*: szereg nieujemnych funkcji ciągłych zbieżny na $[a,b]$ do funkcji ciągłej jest zbieżny jednostajnie. Czy można tu wykorzystać twierdzenie Abela (o szeregach potęgowych)?

(6) Zbadaj jednostajną zbieżność szeregu funkcji:

$$\sum_n \frac{\sin(nt)}{\ln(1+n)}$$

na przedziale $[0,\pi]$.
Wskazówka: szeregi zbieżne jednostajnie można całkować wyraz po wyrazie.

Uwagi:

- *we wskazówce do zadania 4 winno być:* $\int f'_p(t,p)dt = -\frac{1}{p}(e^{p\cos(t)}\sin(p\sin(t)))+C$;
- *w zadaniu 5 zamiast:* „wykorzystując *twierdzenie Diniego*: szereg nieujemnych funkcji ciągłych zbieżny na $[a,b]$ do funkcji ciągłej jest zbieżny jednostajnie” *winno być:* „wykorzystując następujące twierdzenie: szeregi nieujemnych funkcji ciągłych można całkować wyraz po wyrazie”.