Lista zadań nr 1: całka Riemanna

(1) Przypomnij definicje:
- podziału $\mathcal{P}$;
- podziału z punktami pośrednimi $\tilde{\mathcal{P}}$;
- sumy dolnej $S_*(f,\mathcal{P})$ i sumy górnej $S^*(f,\mathcal{P})$ Darboux;
- sumy całkowej $S(f,\tilde{\mathcal{P}})$ Riemanna;
- całki dolnej $\underline{\int_a^b} f$ i górnej $\overline{\int_a^b} f$ Darboux;
- całki Darboux $\int_a^b f$ oraz całki Riemanna z f na przedziale $[a,b]$.

(2) Przypomnij twierdzenia:
- o równoważności całki Darboux i całki Riemanna;
- o całkowalności funkcji ciągłych oraz o całkowalności funkcji ograniczonych, ciągłych poza skończoną liczbą punktów;
- o zgodności całki oznaczonej i całki Riemanna;
- o wzorze $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$;
- o nierówności $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ (i innych nierównościach dla całek).

(3) Udowodnij na dwa sposoby, że jeśli f i g są całkowalne na $[a,b]$ (w sensie Darboux lub równoważnie w sensie Riemanna), to $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. Wykorzystaj: (a) definicję całki Darboux i własności kresów; (b) definicję całki Riemanna.

(4) Udowodnij (wykorzystując definicję całki Riemanna), że jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux) oraz $c \in \mathbb{R}$, to $\int_a^b (cf) = c\int_a^b f$.

(5) Podaj przykład funkcji f takiej, że $|f|$ jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux), ale f nie jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux).

(6) Udowodnij, że jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux), zaś funkcja g spełnia warunek $|g(s)-g(t)| \leq |f(s)-f(t)|$ dla $t,s \in [a,b]$, to funkcja g jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux). Wywnioskuj, że jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux), to $|f|$ jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux).

(7) Wywnioskuj ogólniejsze twierdzenie: jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux), zaś g jest różniczkowalną funkcją, której pochodna jest ciągła na $\mathbb{R}$, to $g \circ f$ jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux). W szczególności całkowalne są zatem funkcje dane wzorami $(f(t))^2$ czy $e^{f(t)}$.

(8) Udowodnij, że jeśli funkcja f jest całkowalna (w sensie Darboux) na $[-a,a]$ i jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f = 0$. Udowodnij analogiczne twierdzenie dla funkcji parzystych.

(9) Zidentyfikuj wyrazy ciągu danego wzorem
$$a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$$
z sumami całkowymi Riemanna funkcji danej wzorem $1/(1+t^2)$ na przedziale $[0,1]$ i oblicz granicę ciągu (a_n).

(10) Oblicz analogicznie
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$$

(11) Oblicz analogicznie (stosując nierównomierny podział przedziału całkowania!)
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{3}{n^2+2^2} + \frac{5}{n^2+3^3} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2+n^2}\right).$$