Lista zadań nr 10: szeregi potęgowe

(1) Znajdź promień zbieżności szeregów potęgowych

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!\,t^n}{(2n)!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n t^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \sin(n) t^n, \qquad \sum_{n\geq 1} n^n t^{n^2}.$$

Wykorzystaj twierdzenie z pierwszego semestru: jeśli $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x \geq 0$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = x$.

(2) Wyznacz tyle wyrazów, ile to możliwe, szeregu potęgowego:

$$(2 + z + 2z^2 + z^3 + \ldots)(1 - 2z + z^2 - 2z^3 + \ldots).$$

Czy potrafisz odgadnąć, jakie szeregi potęgowe miał na myśli autor zadania i wyrazić ich sumę w zwartej postaci?

(3) Wyznacz tyle wyrazów, ile to możliwe, szeregu potęgowego:

$$\frac{1 - 2z + z^2 - 2z^3 + \ldots}{2 + z + 2z^2 + z^3 + \ldots}.$$

(4) Wyznacz tyle wyrazów, ile to możliwe, złożenia (w wybranej kolejności) funkcji danych szeregami potęgowymi:

$$z - 2z^2 + z^3 - 2z^4 + \ldots \qquad \text{oraz} \qquad 2z + z^2 + 2z^3 + z^4 + \ldots.$$

(5) Sprawdź, że szereg potęgowy o współczynnikach a_n (o dodatnim promieniu zbieżności) określa funkcję parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n = 0$ dla n nieparzystych. Sformułuj podobne twierdzenie dla funkcji nieparzystych.

(6) Wyznacz kilka pierwszych wyrazów szeregu potęgowego (o środku w 0) funkcji $f(t) = \exp(\exp(t) - 1)$. Zrób to na dwa sposoby: (a) przez składanie szeregów; (b) przez obliczanie kolejnych pochodnych. Wykorzystaj to do wyznaczenia szeregu potęgowego funkcji $\exp(\exp(t))$.

Czym są liczby i wielomiany Bella?

(7) Szereg $\sum_{n\geq 0} n!\,t^n$ ma zerowy promień zbieżności. Mimo to można udowodnić, że istnieje szereg $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ taki, że (formalny) iloczyn szeregów potęgowych $\left(\sum_{n\geq 0} n!\,t^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)$ jest równy jeden, tj. jest szeregiem $1+0t+0t^2+0t^3+\ldots$ Znajdź kilka pierwszych współczynników a_n.

(8) Niech $f(t) = (1-t)^a = \exp(a\ln(1-t))$ dla $t < 1$. Uzasadnij, że f jest funkcją analityczną (powołując się na odpowiednie twierdzenia z wykładu). Znajdź szereg Maclaurina funkcji $(1-t)^a$. Wyznacz promień zbieżności tego szeregu.

Wobec analityczności f automatycznie suma tego szeregu jest równa $f(t)$!

(9) Wykorzystaj poprzednie zadanie dla $a = -\frac{1}{2}$ do wyznaczenia szeregu potęgowego funkcji $1/\sqrt{1-t^2}$. Scałkuj ten szereg wyraz po wyrazie, aby uzyskać szereg Maclaurina funkcji $\arcsin(t)$. Wywnioskuj (wykorzystując twierdzenie Abela), że:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n+1)}, \qquad \frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{8^n(2n+1)}.$$

(10) Zapisz szereg potęgowy funkcji $\frac{1}{1+t^2}$ i scałkuj go wyraz po wyrazie, by uzyskać szereg Maclaurina funkcji $\operatorname{arctg}(t)$. Jaki jest promień zbieżności tych szeregów? Wywnioskuj (wykorzystując twierdzenie Abela), że:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Pierwszych 10 składników ostatniego wzoru sumuje się do $\frac{57714753584}{10606611015\sqrt{3}} = 3{,}141590\ldots$ ($\pi = 3{,}141592\ldots$).

Zadania dodatkowe

(A) Niech

$$C(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}, \qquad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Operując tylko własnościami szeregów potęgowych, uzasadnij, że $S'(t) = C(t)$, $C'(t) = -S(t)$, $S(t+s) = S(t)C(s) + C(t)S(s)$, $C(t+s) = C(t)C(s) - S(t)S(s)$ oraz $(S(t))^2 + (C(t))^2 = 1$ (ostatnia równość łatwo wynika z przedostatniej dla $s = -t$). Udowodnij ponadto, że istnieje liczba $p > 0$ taka, że $C(t) > 0$ dla $t \in [0, p)$, lecz $C(p) = 0$.

W ten sposób formalnie definije się $\cos(t) = C(t)$, $\sin(t) = S(t)$ oraz $\pi = 2p$.

(B) Niech (d_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja f taka, że $f^{(n)}(0) = d_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. W tym celu niech h będzie dowolnie wiele razy różniczkowalną funkcją, która jest równa 1 w przedziale $[-1, 1]$ oraz 0 w zbiorze $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (funkcja taka została skonstruowana w zadaniu dodatkowym (B) na liście zadań nr 14 w poprzednim semestrze). Niech:

$$\begin{aligned} M_n &= \sup\left\{|h^{(k)}(x)| : k < n,\ x \in \mathbb{R}\right\}, \\ \lambda_n &= 8^n n! M_n \max(1, |d_n|), \\ f_n(x) &= d_n \frac{x^n}{n!} h(\lambda_n x), \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Zauważ, że $f_n^{(k)}(0) = 0$ dla wszystkich $k \neq n$ oraz $f_n^{(n)}(0) = d_n$. Udowodnij, że jeśli $k < n$, to:

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}.$$

Następnie wykorzystaj kryterium Weierstrassa, by wywnioskować jednostajną zbieżność szeregów $\sum_n f_n^{(k)}$ i w konsekwencji równość:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

Wskazówka: udowodnij, że gdy $|x| < 2\lambda_n^{-1}$, $k < n$, to

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(x)| &\leq \frac{d_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(\frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j}\right) \cdot \left(\lambda_n^{k-j} M_n\right) \\ &\leq \frac{d_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(n! 2^n \lambda_n^{j-n}\right) \cdot \left(\lambda_n^{n-1-j} M_n\right) \\ &= d_n \cdot 2^k \cdot 2^n M_n \lambda_n^{-1}. \end{aligned}$$