Lista zadań nr 11: całki z parametrem

(1) Oblicz $\displaystyle\int_0^1 \frac{t(t-1)(t-2)}{\ln(t)}\,dt$.
Wskazówka: wykład!

(2) Dla $p \geq 0$ oblicz $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+p^2t^2)}{1+t^2}\,dt$.
Wskazówka: uzasadnij, że można różniczkować względem p pod znakiem całki.

(3) Oblicz $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\operatorname{tg}(t)}\,dt$.
Wskazówka: rozważ $F(p) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(p\operatorname{tg}(t))}{\operatorname{tg}(t)}\,dt$.

(4) Udowodnij, że $(\Gamma'(p))^2 \leq \Gamma(p)\Gamma''(p)$. Wywnioskuj, że *funkcja digamma* $\psi(p) = \Gamma'(p)/\Gamma(p)$ jest rosnąca, a więc funkcja $\ln(\Gamma(p))$ jest wypukła.
Wskazówka: zapisz $2\Gamma'(p)\Gamma'(p)$ oraz $\Gamma(p)\Gamma''(p) + \Gamma''(p)\Gamma(p)$ w postaci całek iterowanych (w każdym iloczynie pierwszy czynnik jako całka po t, drugi — po s) i porównaj funkcje podcałkowe.

(5) Dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $t > 0$ niech:

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ns - t\sin(s))ds.$$

Zauważ, że J_n jest ciągłą funkcją $t > 0$ oraz $J_n'(t) = \frac{1}{2}J_{n-1}(t) - \frac{1}{2}J_{n+1}(t)$.
J_n to tzw. funkcja Bessela (pierwszego rodzaju).

(6) Dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $t > 0$ niech:

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{t\cos(s)}\cos(ns)ds.$$

Zauważ, że I_n jest ciągłą funkcją $t > 0$ oraz $I_n'(t) = \frac{1}{2}I_{n-1}(t) + \frac{1}{2}I_{n+1}(t)$.
I_α to tzw. zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju.

(7) Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $t > 0$ niech:

$$K_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\cosh(s)}\cosh(\alpha s)ds.$$

Udowodnij, że K_α jest ciągłą funkcją $t > 0$ oraz $K_\alpha'(t) = -\frac{1}{2}K_{\alpha-1}(t) - \frac{1}{2}K_{\alpha+1}(t)$.
K_α to tzw. zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju.

(8) Niech $0 < a < b$. Zauważ, że:

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \int_a^b e^{-st}ds.$$

Wykorzystaj to do obliczenia całki Frullaniego:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Starannie uzasadnij prawidłowość zamiany kolejności całkowania.

(9) Udowodnij, że jeśli $p, q > 1$ oraz $0 \leq t \leq u$, to:

$$t^{p-1}(u-t)^{q-1}e^{-u} \leq (t^{p-1}e^{-t/2})(u^{q-1}e^{-u/2})$$

i wywnioskuj, że prawidłowa jest zmiana kolejności całkowania z wykładu:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} t^{p-1}(u-t)^{q-1}e^{-u}du\right)dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} t^{p-1}(u-t)^{q-1}e^{-u}dt\right)du.$$

(10) Znajdź dalszą część cytatu: *I had learned to do integrals by various methods...*

Zadania dodatkowe

(A) Dla $p \in [0, +\infty]$ niech:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}\sin(t)}{t}\, dt.$$

Uzasadnij, że F jest ciągła na $[0, +\infty]$ i różniczkowalna na $(0, +\infty)$ oraz oblicz $F'(p)$. Wywnioskuj, że $F(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p)$. Udowodnij, że F jest ciągła w 0 i wobec tego $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

(B) Całka z parametrem:

$$F(p) = \int_a^{b^-} f(p,t)dt$$

jest *jednostajnie zbieżna* względem $p \in [\alpha, \beta]$, jeśli granica:

$$\lim_{s \to b^-} \int_a^s f(p,t)dt = F(p)$$

istnieje jednostajnie względem $p \in [\alpha, \beta]$. Udowodnij, że jeśli $f(p,t)$ jest ciągła na $[a,b) \times [\alpha, \beta]$ i całka z parametrem z $f(p,t)$ jest jednostajnie zbieżna względem $p \in [\alpha, \beta]$, to:

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b^-} f(p,t)dt \right) dp = \int_a^{b^-} \left(\int_\alpha^\beta f(p,t)dp \right) dt.$$

(C) Przypuśćmy, że f jest funkcją o ciągłej pochodnej na $(0, +\infty)$ oraz że f ma granice jednostronne $p = \lim_{t \to 0^+} f(t)$ oraz $q = \lim_{t \to +\infty} f(t)$. Niech $0 < a < b$. Zauważ, że:

$$\frac{f(bt) - f(at)}{t} = \int_a^b f'(st)ds.$$

Wykorzystaj to do obliczenia całki Frullaniego:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t}\, dt = (q - p) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Starannie uzasadnij, że można zamienić kolejność całkowania.

(D) Oblicz $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, dt$.

(E) Udowodnij, że Γ jest jedyną funkcją wypukłą, która spełnia warunki $\Gamma(1) = 1$ oraz $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ dla $p > 0$.

(F) Wykorzystaj wzór Wallisa i wypukłość funkcji Γ, by udowodnić, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.