Lista zadań nr 12: aproksymacja

W poniższych zadaniach f oznacza funkcję ciągłą na przedziale $[a,b]$, zaś $\|f\|$ normę supremum f, tj. $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$.

(1) Funkcja g jest *funkcją schodkową* na $[a,b]$, jeśli istnieje podział $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ przedziału $[a,b]$ taki, że g jest stała na każdym z przedziałów (t_{j-1}, t_j), gdzie $j = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa g o własności $\|f - g\| < \varepsilon$.

(2) Funkcja g jest *kawałkami liniowa* na $[a,b]$, jeśli istnieje podział $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ przedziału $[a,b]$ taki, że g jest funkcją liniową na każdym z przedziałów $[t_{j-1}, t_j]$, gdzie $j = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje kawałkami liniowa funkcja g o własności $\|f - g\| < \varepsilon$.

(3) Czy funkcje schodkowe tworzą zbiór gęsty w $\mathscr{C}([a,b])$? Czy funkcje kawałkami liniowe tworzą zbiór gęsty w $\mathscr{C}([a,b])$?

Niech (P_n) będzie ciągiem sum częściowych szeregu Taylora funkcji $h(t) = \sqrt{t}$ wokół $t_0 = 1$. Z zadania 8 z listy 10 wynika, że promień zbieżności tego szeregu to 1 oraz że granicą ciągu $(P_n(t))$ jest $h(t)$ dla $t \in (0,2)$. Łatwo sprawdzić, że ciąg $(P_n(t))$ jest zbieżny również dla $t = 0$ i ponadto $(P_n(t))$ jest ciągiem malejącym dla każdego $t \in [0,1]$. Z twierdzenia Diniego wynika zbieżność jednostajna ciągu (P_n) w $[0,1]$ do funkcji h.

(4) Wykorzystując powyższy ciąg (P_n), skonstruuj ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do: (a) funkcji $g(t) = |t|$ na przedziale $[-1,1]$; (b) funkcji $g(t) = p|t - q|$ na przedziale $[a,b]$, gdzie $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

(5) Uzasadnij, że każda funkcja kawałkami liniowa jest sumą funkcji postaci $p|t - q|$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$. Wywnioskuj, że każda funkcja schodkowa na $[a,b]$ jest granicą jednostajną ciągu wielomianów. Wywnioskuj, że każda funkcja ciągła na $[a,b]$ jest granicą jednostajną ciągu wielomianów (tw. Weierstrassa).

(6) Wywnioskuj, że każdą funkcję ciągłą na $[0,+\infty)$, posiadającą granicę w $+\infty$, można jednostajnie przybliżać przy pomocy kombinacji liniowych funkcji wykładniczych e^{-at} (gdzie $a \geq 0$).

Wskazówka: rozważ $g(s) = f(-\ln(s))$, $s \in (0,1]$.

(7) Wywnioskuj, że każdy zbieżny ciąg (a_n) można jednostajnie przybliżać przy pomocy kombinacji liniowych ciągów geometrycznych.

Zadania dodatkowe

(A) Udowodnij twierdzenie Diniego.

(B) Udowodnij twierdzenie Abela (dla szeregów potęgowych).

(C) Niech f będzie funkcją ciągłą na $[-1, 1]$. Zauważ, że dla danego $n \in \mathbb{N}$ oraz ustalonych punktów $t_0, t_1, \ldots, t_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian Q_n stopnia n, który jest równy f w tych punktach — jest to tzw. *wielomian interpolacyjny.* Udowodnij, że

$$|f(t) - Q_n(t)| = \frac{(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(s)$$

dla odpowiedniego punktu pośredniego s.

(D) Wywnioskuj, że wielomiany interpolacyjne funkcji $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin(t)$, $f(t) = e^{-t^2}$ z równo rozłożonymi węzłami (tj. $t_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$) dążą jednostajnie do funkcji f.

(E) Narysuj wykresy początkowych wielomianów interpolacyjnych funkcji $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ na przedziale $[-5, 5]$ z równo rozłożonymi węzłami (*przykład Rungego*). Czy wielomiany te dążą jednostajnie do funkcji f?

(F) Poczytaj o wielomianach interpolacyjnych z węzłami Czebyszewa — taki wybór węzłów (w pewnym sensie) minimalizuje błąd interpolacji.