Lista zadań nr 6: całki niewłaściwe (1/2)

(1) Udowodnij kryterium Dirichleta dla całek niewłaściwych bez odwoływania się do całki Riemanna–Stieltjesa, za to przy dodatkowym założeniu, że funkcja f ma ciągłą pochodną, zaś funckja g jest ciągła.

(2) Zbadaj, w zależności od parametrów p i q, zbieżność całek:

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt, \qquad \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^p}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^p}\,dt.$$

(3) Zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{2}\bigg|_{t=-T}^{t=T} = \lim_{T\to+\infty} 0 = 0;$$

$$\int_{-1^+}^{1^-} \frac{t}{1-t^2}\,dt = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{t}{1-t^2}\,dt = \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{\ln(1-t^2)}{2}\bigg|_{t=-1+\varepsilon}^{t=1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0^+} 0 = 0.$$

Czy rzeczywiście?

(4) Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[0,b]$ dla $b>0$, a całka $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ jest zbieżna. Czy całka $\int_0^{+\infty} (f(t))^2dt$ jest zbieżna?

(5) Czy odpowiedź na pytanie z poprzedniego zadania zmieni się, gdy założymy dodatkowo, że $f(t)\geq 0$ dla wszystkich $t\geq 0$?

(6) Czy odpowiedź na pytania z poprzednich dwóch zadań zmieni się, gdy założymy dodatkowo, że całka $\int_0^{+\infty} (f(t))^3dt$ jest zbieżna?

(7) Rozstrzygnij zbieżność całek niewłaściwych:

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt, \qquad \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t}\,dt, \qquad \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t^2}\,dt.$$

Kryterium Dirichleta

Jeśli funkcja f jest malejąca na $[A,+\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$, funkcja g jest całkowalna na $[A,b)$ dla każdego $b>A$ oraz funkcja $G(b)=\int_A^b g(t)dt$ jest ograniczona na $[A,+\infty)$, to $\int_A^{+\infty} f(t)g(t)dt$ jest zbieżna.

Dowód. Zachodzi:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt &= \lim_{b\to+\infty}\int_A^b f(t)g(t)dt\\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_A^b f(t)dG(t)\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(f(b)G(b)-f(A)G(A)-\int_A^b G(t)df(t)\right)\\ &= 0-f(A)G(A)-\lim_{b\to+\infty}\int_A^b G(t)df(t);\end{aligned}$$

zastosowaliśmy w kolejnych równościach: definicję całki niewłaściwej, wzór na podstawienie w całce Riemanna–Stietjesa (nieudowodniony na wykładzie), wzór na całkowanie przez części (udowodniony), założenia kryterium. Istnienie wszystkich całek jest konsekwencją wymienionych twierdzeń.

Niech $|G(t)|\le M$ dla $t\in[A,+\infty)$. Funkcja f jest malejąca, zatem gdy $A<b_1<b_2$, to:

$$\int_{b_1}^{b_2} G(t)df(t)\ge\int_{b_1}^{b_2} Mdf(t)=M(f(b_2)-f(b_1)),$$
$$\int_{b_1}^{b_2} G(t)df(t)\le\int_{b_1}^{b_2} (-M)df(t)=-M(f(b_2)-f(b_1));$$

w istocie, nierówności dla całek wynikają z analogicznych nierówności dla sum całkowych (przyrosty f są ujemne!). Wobec tego gdy $h(b)=\int_A^b G(t)df(t)$ dla $b>A$ oraz gdy $b_1,b_2>A$, to zachodzi:

$$|h(b_2)-h(b_1)|=\left|\int_{b_1}^{b_2} G(t)df(t)\right|\le M|f(b_2)-f(b_1)|.$$

Funkcja f ma granicę w $+\infty$, zatem spełnia warunek Cauchy'ego istnienia granicy w $+\infty$: dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $b>A$ takie, że gdy $b_1,b_2>b$, to $|f(b_1)-f(b_2)|<\varepsilon$. Ten sam warunek spełnia więc funkcja h, a to oznacza, że h ma granicę w $+\infty$. Na mocy pierwszej równości w niniejszym dowodzie oznacza to zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$. $\square$