Lista zadań nr 9: zamiana kolejności

(1) Niech $f_n(t) = \dfrac{n^2t^2}{(1+t^2)^n}$. Wyznacz:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{t\to 0} f_n(t)\right), \qquad \lim_{t\to 0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(\tfrac{1}{n}).$$

Czy ciąg funkcji (f_n) jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$?

(2) Wyznacz:

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^3+n^3}{2^nk^3+1}.$$

Wskazówka: sprawdź, że wyrazy sumy nie przekraczają $(1+n^3)/2^n$ i skorzystaj z kryterium Weierstrassa.

(3) Niech:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2+n} & \text{gdy } n > k, \\ 0 & \text{gdy } n = k, \\ -\dfrac{1}{k^2+k} & \text{gdy } n < k. \end{cases}$$

Sprawdź, że:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k}\right) = -1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k}\right) = 1.$$

(4) Niech $f_n(t) = n^2te^{-nt}$. Sprawdź, że ciąg funkcji (f_n) dąży punktowo do funkcji stale równej zero na $[0,1]$ oraz wyznacz:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt.$$

Czy ciąg funkcji (f_n) dąży do zera jednostajnie na $[0,1]$?

(5) Funkcja g jest nieujemna i ma całkę niewłaściwą na przedziale $[A,B)$. Ponadto ciąg całkowalnych funkcji (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f na każdym przedziale $[a,b]$ zawartym w $[A,B)$ oraz $0 \le f_n(t) \le g(t)$ dla $t \in [A,B)$. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_A^{B^-} f_n(t)dt = \int_A^{B^-} f(t)dt.$$

Czy prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla całek niewłaściwych $\displaystyle\int_{A^+}^{B^-}$?

(6) Niech

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^n & \text{gdy } t \in (0, \frac{1}{2^n}], \\ -2^n & \text{gdy } t \in (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \\ 0 & \text{gdy } t \in \{0\} \cup (\frac{1}{2^n}, +\infty). \end{cases}$$

Wyznacz:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right) \qquad \text{oraz} \qquad \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt.$$