Analiza matematyczna 2 — egzamin

imię i nazwisko, numer indeksu

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

(1) Sformułuj definicję całki niewłaściwej $\int_{0^+}^{1} f(x)dx$. (2 p.)

Całka ta jest równa $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f(x)dx$.

(2) Sformułuj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu liczbowego $\sum_n a_n$ o wyrazach dodatnich. (2 p.)

Jeśli $a_n > 0$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$ *i* $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *to szereg* $\sum_n a_n$ *jest rozbieżny.*

Jeśli $a_n > 0$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$ *i* $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *to szereg* $\sum_n a_n$ *jest zbieżny.*

(3) Sformułuj definicję jednostajnej zbieżności ciągu funkcji (f_n) do funkcji f na zbiorze $[0, 1]$. (2 p.)

Dla każdego $\varepsilon > 0$ *istnieje* N *takie, że dla* $n > N$ *oraz* $x \in [0, 1]$ *zachodzi* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(4) Funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2 i spełnia warunki

$$f(1,1) = 2, \qquad f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0, \qquad f''_{xx}(1,1) = 2, \qquad f''_{yy}(1,1) = 8, \qquad f''_{xy}(1,1) = p.$$

Co trzeba założyć o p, by mieć pewność, że f ma w punkcie $(1, 1)$ ekstremum lokalne? Czy jest to maksimum, czy minimum lokalne? (2 p.)

Musi być spełniony warunek $2 \cdot 8 - p^2 > 0$, *tzn.* $p \in (-4, 4)$. *W tym przypadku* f *ma w punkcie* $(1, 1)$ *minimum lokalne (ponieważ* $f''_{xx}(1, 1) > 0$*).*

(5) Wiadomo, że $f'_x(1, 2) = 3$ oraz $f'_y(1, 2) = 4$. Wykorzystując te informacje, sformułuj definicję różniczkowalności funkcji $f(x, y)$ w punkcie $(1, 2)$. (2 p.)

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{f(x,y) - f(1,2) - 3(x-1) - 4(x-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = 0.$$

(6) Do jakiej wartości zbieżny jest szereg Fouriera funkcji $f(t) = \frac{t}{2\pi} - \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor$ w punkcie $t = 0$? (2 p.)

Do średniej arytmetycznej granic jednostronnych f *w zerze, a więc do* $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

(7) Uzasadnij, że funkcja $H(y) = 2\int_0^{1^-} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (*funkcja Struve'a*) jest ciągła na $\mathbb{R}$. Sformułuj wykorzystane twierdzenie. (5 p.)

Twierdzenie: Jeśli $f(x,y)$ jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych: $x \in (a,b)$, $y \in [c,d]$ oraz istnieje funkcja $g(x)$ taka, że $|f(x,y)| \le g(x)$ dla $x \in (a,b)$, $y \in [c,d]$ oraz całka niewłaściwa $\int_{a^+}^{b^-} g(x)dx$ jest zbieżna, to całka z parametrem

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

jest ciągłą funkcją $y \in [c,d]$.

Funkcja $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{1-x^2}}$ jest ciągłą (bo elementarną) funkcją dwóch zmiennych: $x \in [0,1)$ oraz $y \in \mathbb{R}$. Ponadto $|f(x,y)| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ oraz $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)\big|_{x=0}^{x\to 1^-} = \frac{\pi}{2}$ jest zbieżna. Na mocy przytoczonego wyżej twierdzenia funkcja $H(y) = \int_0^{1^-} f(x,y)dy$ jest ciągła na każdym przedziale $[c,d]$, a więc — na $\mathbb{R}$.

Część rachunkowa

W części rachunkowej nie trzeba formułować wykorzystywanych twierdzeń

(8) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}+1}$. (3 p.)

Szereg ten jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza: ciąg o wyrazach $1/(n+\sqrt{n}+1)$ jest oczywiście malejący i zbieżny do zera.

(9) Wykorzystując własności szeregów potęgowych oraz równość $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dla $x \in (-1,1)$, oblicz

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \qquad \text{dla } x \in (-1,1).$$

(5 p.)

Szeregi potęgowe można różniczkować wyraz po wyrazie, zatem

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

Z drugiej strony

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

(10) Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^\infty e^x \cos(e^{2x})dx$. (5 p.)

Całka ta jest zbieżna na mocy kryterium Dirichleta: funkcja $e^{2x}\cos(e^{2x})$ *ma ograniczoną funkcję pierwotną* $\frac{1}{2}\cos(e^{2x})$*, zaś funkcja* e^{-x} *jest malejąca i zbieżna do zera w nieskończoności, przez co całka* $\int_0^\infty e^{2x}\cos(e^{2x}) \cdot e^{-x}dx$ *jest zbieżna.*

(11) Znajdź wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ w kole $x^2 + y^2 \leq 2$. (5 p.)

Pochodne cząstkowe f *to* $f'_x(x, y) = 2x + y$ *oraz* $f'_y(x, y) = x + 2y$*. Przyrównując je do zera, otrzymujemy punkt podejrzany* $x = y = 0$*; zachodzi* $f(0, 0) = 0$*. Wartości na brzegu to* $g(t) = f(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)) = 2 + 2\sin(t)\cos(t) = 2 + \sin(2t)$*, gdzie* $t \in [0, 2\pi)$*. Funkcja* g *przyjmuje wartość najmniejszą* $g(\frac{3\pi}{4}) = g(\frac{7\pi}{4}) = 1$ *i wartość największą* $g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{5\pi}{4}) = 3$*. Zatem wartość największa to* $f(1, 1) = f(-1, -1) = 3$*, najmniejsza zaś to* $f(0, 0) = 0$*.*

(12) Funkcja $\phi(x)$ jest ciągła w otoczeniu 0, spełnia równanie $1+x^2+\phi(x)=\sin(x\phi(x))$ oraz warunek $\phi(0)=-1$. Wyznacz $\phi'(0)$. (3 p.)

Twierdzenie o funkcji uwikłanej gwarantuje różniczkowalność funkcji ϕ w zerze dowolną liczbę razy (bowiem funkcja $f(x,y)=1+x^2+y-\sin(xy)$ jest dowolnie wiele razy różniczkowalna wokół punktu $(0,-1)$ i spełnia warunek $f'_y(0,-1)\neq 0$). Otrzymujemy zatem

$$2x+\phi'(x)=\cos(x\phi(x))(\phi(x)+x\phi'(x)),$$

skąd $\phi'(0)=-1$.

(13) Oblicz całkę Riemanna–Stieltjesa $\int_0^1 f(t)dg(t)$, jeśli $f(t)=t^2$ oraz $g(t)=t^3$. (3 p.)

Ze wzoru $\int_a^b f(t)dg(t)=\int_a^b f(t)g'(t)dt$ wynika, że w omawianym tu przypadku

$$\int_0^1 f(t)dg(t)=\int_0^1 t^2\cdot 3t^2dt=3\int_0^1 t^4dt=\frac{3}{5}\,.$$

(14) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_n \frac{n^{n^2}}{2^{2^n}}$. (6 p.)

Szereg ten jest zbieżny. Najwygodniej jest zastosować kryterium porównawcze: zachodzi $n\leq 2^n$, zatem $n^{n^2}\leq (2^n)^{n^2}=2^{n^3}$, przez co $n^{n^2}/2^{2^n}\leq 2^{n^3-2^n}$. Ponadto $\lim_{n\to\infty}(n^3/2^n)=0$ (np. na mocy reguły de l'Hospitala, zastosowanej trzykrotnie do ilorazu $x^3/2^x$), zatem od pewnego miejsca $2^n\geq 2n^3$. Od tego miejsca zachodzi więc $n^{n^2}/2^{2^n}\leq 2^{n^3-2n^3}\leq 2^{-n}$. Szereg $\sum_n 2^{-n}$ jest zaś oczywiście zbieżny.