Analiza matematyczna M2 — kolokwium 1 _____

imię i nazwisko, numer indeksu

(1) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_n \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$.

(2) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln(n^2-3n+10)}$.

(3) Oblicz $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{(n+1)^2}+\frac{n-2}{(n+2)^2}+\frac{n-3}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{n-n}{(n+n)^2}\right)$.

(4) Szeregi $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ oraz $\sum_n b_n^2$ są zbieżne. Czy szereg $\sum_n a_n b_n$ jest zbieżny?

Rozwiązania:

(1) Na mocy reguły de l'Hospitala,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^{x/8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^{x/8}\ln(2)/8}=0.$$

Wobec tego, przyjmując $x_n=\sqrt{n}$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{2^{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^8}{2^{x_n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{2^{x_n/8}}\right)^8=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^{x/8}}\right)^8=0^8=0.$$

Oznacza to, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2/2^{\sqrt{n}}}{1/n^2}=0.$$

Zbieżność szeregu $\sum_n \frac{1}{n^2}$ oraz kryterium ilorazowe implikują zbieżność szeregu z zadania.

(2) Funkcja $x^2-3x+10$ jest rosnąca dla $x\geqslant\frac{3}{2}$, zatem ciąg $\ln(n^2-3n+10)$ jest rosnący dla $n\geqslant 2$. Wyrazy tego ciągu są dodatnie, zatem ciąg $1/\ln(n^2-3n+10)$ jest malejący. Jest on też oczywiście zbieżny do zera. Zbieżność szeregu z zadania jest zatem konsekwencją kryterium Leibniza.

(3) Wyrażenie pod granicą to suma Riemanna funkcji $\frac{1-x}{(1+x)^2}$ przy równomiernym podziale przedziału $[0,1]$ na n części:

$$\frac{n-1}{(n+1)^2}+\frac{n-2}{(n+2)^2}+\frac{n-3}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{n-n}{(n+n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\frac{1-k/n}{(1+k/n)^2}\,.$$

Granicą rozważanego wyrażenia jest zatem

$$\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)^2}\,dx=\int_0^1\left(\frac{2}{(1+x)^2}-\int_0^1\frac{1}{1+x}\right)dx=-\frac{2}{1+x}-\ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$=-\frac{2}{2}-\ln(2)+\frac{2}{1}+\ln(1)=1-\ln(2).$$

(4) Nie: kontrprzykładem są ciągi wyrazów $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$. Zbieżność $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ wynika z twierdzenia Leibniza; zbieżność $\sum_n b_n^2=\sum_n\frac{1}{n^{4/3}}$ jest dobrze znanym faktem z wykładu, podobnie rozbieżność $\sum_n a_n b_n=\sum_n\frac{1}{n}$.