Lista zadań nr 10: całki z parametrem

(1) Wykorzystując równość

$$\frac{x-1}{\ln(x)} = \int_0^1 x^y dy,$$

oblicz

$$\int_0^1 \frac{x(x-1)(x-2)}{\ln(x)}\, dt.$$

(2) Dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $x > 0$ niech:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ny - x\sin(y))dy.$$

Wykaż, że J_n jest ciągłą funkcją $x > 0$ oraz $J_n'(x) = \frac{1}{2}J_{n-1}(x) - \frac{1}{2}J_{n+1}(x)$.
J_n to tzw. *funkcja Bessela pierwszego rodzaju.*

(3) Dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $x > 0$ niech:

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos(y)}\cos(ny)dy.$$

Wykaż, że I_n jest ciągłą funkcją $x > 0$ oraz $I_n'(x) = \frac{1}{2}I_{n-1}(x) + \frac{1}{2}I_{n+1}(x)$.
I_α to tzw. *zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju.*

(4) Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$ niech:

$$K_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh(y)}\cosh(\alpha y)dy.$$

Udowodnij, że K_α jest ciągłą funkcją $x > 0$. Wykaż, że można różniczkować pod znakiem całki i sprawdź, że $K_\alpha'(x) = -\frac{1}{2}K_{\alpha-1}(x) - \frac{1}{2}K_{\alpha+1}(x)$.
K_α to tzw. *zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju* albo *funkcja Macdonalda.*

(5) Niech $0 < a < b$. Zauważ, że

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}dy.$$

Wykorzystaj tę równość do obliczenia całki Frullaniego

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

(6) Dla $p \geqslant 0$ oblicz

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+p^2x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

Zrób to na dwa sposoby:
(a) wykorzystaj twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki niewłaściwej;
(b) wykorzystaj twierdzenie Fubiniego dla całek niewłaściwych z nieujemnych funkcji ciągłych.

(7) Oblicz

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\operatorname{tg}(t)}\, dt,$$

rozważając funkcję

$$F(p) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(p \operatorname{tg}(t))}{\operatorname{tg}(t)}\, dt.$$

(8) Różniczkując pod znakiem całki, sprawdź, że dla $p > 0$ zachodzi:

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty \ln(x) x^{p-1} e^{-x} dx, \qquad \Gamma''(p) = \int_0^\infty (\ln(x))^2 x^{p-1} e^{-x} dx$$

i wobec tego funkcja gamma jest wypukła na $(0, \infty)$.
Zadanie dodatkowe: dlaczego można różniczkować pod znakiem całki?

(9) Zauważ, że

$$2(\Gamma'(p))^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 2 \ln(x) \ln(y) x^{p-1} y^{p-1} e^{-x-y} dy \right) dx,$$

$$\Gamma(p)\Gamma''(p) + \Gamma''(p)\Gamma(p) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty ((\ln(x))^2 + (\ln(y))^2) x^{p-1} y^{p-1} e^{-x-y} dy \right) dx.$$

Wywnioskuj, że dla $p > 0$ zachodzi

$$(\Gamma'(p))^2 \leqslant \Gamma(p)\Gamma''(p).$$

Wykorzystaj tę nierówność do dowodu wypukłości funkcji $\ln(\Gamma(p))$ na $(0, \infty)$.
Oznacza to, że *funkcja digamma*, określona wzorem $\psi(p) = \Gamma'(p)/\Gamma(p) = (\ln(\Gamma(p)))'$, jest rosnąca.

(10) Znajdź dalszą część cytatu: *I had learned to do integrals by various methods...*

Potrzebne twiedzenia

- Twierdzenie o ciągłości całki z parametrem:
  Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na prostokącie $[a,b]\times[c,d]$ oraz $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$, to $F(y)$ jest ciągła na $[a,b]$. Przedział $[c,d]$ można zastąpić dowolnym przedziałem.

- Twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki:
  Jeśli $f(x,y)$ oraz $f'_y(x,y)$ są ciągłe na prostokącie $[a,b]\times[c,d]$ oraz $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$, to $F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx$ dla $y\in[c,d]$. Przedział $[c,d]$ można zastąpić dowolnym przedziałem.

- Twierdzenie Fubiniego dla całek z funkcji ciągłych:
  Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na prostokącie $[a,b]\times[c,d]$, to
  $$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

- Twierdzenie o ciągłości całki niewłaściwej z parametrem:
  Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na prostokącie $(a,b)\times[c,d]$, $|f(x,y)|\leqslant g(x)$, całka niewłaściwa $\int_{a^+}^{b^-} g(x)dx$ jest skończona oraz $F(y)=\int_{a^+}^{b^-} f(x,y)dx$, to $F(y)$ jest poprawnie określona i ciągła na $[a,b]$.

- Twierdzenie o różniczkowaniu całki z parametrem:
  Jeśli $f(x,y)$ oraz $f'_y(x,y)$ są ciągłe na prostokącie $(a,b)\times[c,d]$, $|f'_y(x,y)|\leqslant g(x)$, całka niewłaściwa $\int_{a^+}^{b^-} g(x)dx$ jest skończona oraz $F(y)=\int_{a^+}^{b^-} f(x,y)dx$ jest poprawnie określona dla pewnego $y\in[c,d]$, to $F(y)$ jest poprawnie określona dla wszystkich $y\in[c,d]$ oraz $F'(y)=\int_{a^+}^{b^-} f'_y(x,y)dx$.

- Twierdzenie Fubiniego dla całek niewłaściwych z funkcji nieujemnych:
  Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła i nieujemna na prostokącie $(a,b)\times(c,d)$, to
  $$\int_{a^+}^{b^-}\left(\int_{c^+}^{d^-} f(x,y)dy\right)dx=\int_{c^+}^{d^-}\left(\int_{a^+}^{b^-} f(x,y)dx\right)dy,$$
  pod warunkiem, że obie strony równości są poprawnie określone.

Zadania dodatkowe

(A) Dla $p \in [0, \infty]$ niech:

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin(x)}{x}\,dx.$$

Uzasadnij, że F jest ciągła na $[0, \infty]$ i różniczkowalna na $(0, \infty)$ oraz oblicz $F'(p)$. Wywnioskuj, że $F(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p)$. Wywnioskuj, że $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

(B) Całka z parametrem:

$$F(y) = \int_a^{b^-} f(x, y)dx$$

jest *jednostajnie zbieżna* względem $y \in [c, d]$, jeśli granica:

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x, y)dx = F(y)$$

istnieje jednostajnie względem $y \in [c, d]$. Udowodnij, że jeśli $f(x, y)$ jest ciągła na $[a, b) \times [c, d]$ i całka z parametrem z $f(x, y)$ jest jednostajnie zbieżna względem $y \in [c, d]$, to:

$$\int_c^d \left(\int_a^{b^-} f(x, y)dy \right) dx = \int_a^{b^-} \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

(C) Przypuśćmy, że f jest funkcją o ciągłej pochodnej na $(0, \infty)$ oraz że f ma granice jednostronne $p = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ oraz $q = \lim_{x \to \infty} f(x)$. Niech $0 < a < b$. Zauważ, że:

$$\frac{f(bx) - f(ax)}{x} = \int_a^b f'(xy)dy.$$

Wykorzystaj to do obliczenia całki Frullaniego:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = (q - p)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Starannie uzasadnij, że można zamienić kolejność całkowania.

(D) Udowodnij, że Γ jest jedyną funkcją na $(0, \infty)$, której logarytm jest funkcją wypukłą i która spełnia warunki $\Gamma(1) = 1$ oraz $\Gamma(p + 1) = p\,\Gamma(p)$ dla $p > 0$.

(E) Wykorzystaj wzór Wallisa i wypukłość funkcji Γ, by udowodnić, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.