Lista zadań nr 2: całki nieoznaczone i oznaczone

(1) Oblicz całkę $\int \cos(at)\cos(bt)\cos(ct)dt$ (zakładając, jeśli zajdzie taka potrzeba, odpowiednie warunki na parametry a, b i c).

(2) Znajdź błąd w następującym rachunku:

$$\int |t|dt = \int \sqrt{t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right| = \int \sqrt{x^4}\, 2xdx$$
$$= \int x^2\, 2xdx = \int 2x^3dx = \tfrac{1}{2}x^4 + C = \tfrac{1}{2}t^2 + C.$$

(3) Udowodnij, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie T, to $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

(4) Uzasadnij, że jeśli f jest funkcją parzystą, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Podaj analogiczny wzór dla funkcji nieparzystych.

(5) Oblicz $\displaystyle\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)dx$ oraz $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$.

(6) Wykorzystując wyniki poprzednich dwóch zadań, oblicz $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$ oraz $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$.

(7) Udowodnij, że jeśli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, funkcja g jest nieujemna na (a, b), a funkcje g oraz fg są całkowalne na $[a, b]$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Zadania dodatkowe

(A) Wyznacz całkę $\int \sqrt{1-\cos(x)}dx$. Czy wyznaczona przez Ciebie funkcja jest w istocie funkcją pierwotną na całym zbiorze $\mathbb{R}$? Jeśli nie, jak ją poprawić?

(B) (*Lemat Riemanna–Lebesgue'a*) Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[0,\pi]$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

(C) Niech g będzie funkcją ciągłą na $[a,b]$ i różniczkowalną w (a,b), o wartościach w przedziale $[c,d]$. Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na (c,d), ciągłą na przedziale $[c,d]$. Uzasadnij, że jeśli $f(g(x))g'(x)$ ma funkcję pierwotną, to jest nią $F(g(x))$.

(D) Niech g będzie funkcją ciągłą na $[a,b]$ i różniczkowalną w (a,b), o wartościach w przedziale $[c,d]$. Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na (c,d), ciągłą na przedziale $[c,d]$. Jeśli (na przykład) f jest jednostronnie ciągła w c i d, to $F(g(x))$ jest funkcją pierwotną $f(g(x))g'(x)$; udowodnij jednak, że w ogólnym przypadku tak być nie musi! Wskazówka: rozważ funkcje

$$F(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\,\sin(\frac{1}{y}) & \text{dla } y>0, \\ 0 & \text{dla } y=0; \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} F'(y) & \text{dla } y>0, \\ 0 & \text{dla } y=0; \end{cases} \qquad g(x) = x^2.$$

(E) Wiadomo, że g i h są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne w (a,b). Ponadto $g(a)=g(b)$ oraz $h'(x) = f(g(x))g'(x)$ dla $x\in(a,b)$, gdzie f jest pewną funkcją. Udowodnij, że $h(a)=h(b)$.

Jedyny znany mi dowód wykorzystuje całkę Henstocka–Kurzweila. Czy znajdą Państwo prostszy argument?