Lista zadań nr 3: zastosowania całek oznaczonych

Na odwrocie znajdą Państwo niezbędne wzory.

(1) Oblicz pole powierzchni soczewki utworzonej przez wycinek wykresu funkcji sinus (zawarty między dwoma kolejnymi miejscami zerowymi tej funkcji) i oś poziomą.

(2) Oblicz pole powierzchni i obwód *asteroidy* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqslant 1\}$.

(3) Oblicz pole powierzchni figury ograniczonej wykresami funkcji $f(x) = 1+\sqrt{|x| - x^2}$ oraz $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$. Co to za figura?

(4) Punkty o współrzędnych $(\sinh(t), \cosh(t))$ leżą na wykresie funkcji $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ (jednej z gałęzi hiperboli $y^2 - x^2 = 1$). Oblicz pole obszaru ograniczonego przez wykres tej funkcji, prostą pionową oraz odcinek o końcach $(0,0)$ i $(\sinh(a), \cosh(a))$.

(5) Wyznacz współrzędne środka ciężkości ćwiartki koła $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

(6) Wyznacz współrzędne środka ciężkości ćwiartki okręgu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

(7) Oblicz objętość i pole powierzchni kuli $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

(8) Zwierciadło paraboliczne ma kształt *paraboloidy obrotowej* $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ z = x^2 + y^2\}$. Oblicz masę (czyli pole powierzchni) takiego zwierciadła.

(9) Zwierciadło z poprzedniego zadania wykonano inaczej: zamiast samej powierzchni wytworzono litą bryłę $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}$. Oblicz masę (czyli objętość) takiego zwierciadła.

(10) W obu poprzednich zadaniach wyznacz takie R, dla którego środek ciężkości zwierciadła leży w punkcie $(0, 0, \frac{1}{4})$ (ognisku zwierciadła). W pierwszym przypadku wykorzystaj komputer do numerycznego rozwiązania odpowiedniego równania (rozwiązanie analityczne istnieje, ale jest bardzo skomplikowane).

To zadanie ma praktyczne zastosowanie!

UWAGI:

- Pole powierzchni trapezu krzywoliniowego $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ (zawartego pomiędzy wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$) dane jest wzorem:
$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx;$$
tutaj f i g są funkcjami całkowalnymi na $[a,b]$ (w sensie Darboux) i spełniającymi warunek $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a,b]$.
- Środek masy powyższego trapezu krzywoliniowego (o jednorodnej gęstości) ma współrzędne $(\bar{x}, \bar{y})$ dane wzorem
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x))dx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{f(x)+g(x)}{2} \cdot (g(x) - f(x))dx.$$
- Długość łuku krzywej $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ y = f(x)\}$ (tworzącej wykres funkcji f) dana jest wzorem
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$
tu f jest funkcją różniczkowalną na (a,b) i taką, że $\sqrt{1+(f')^2}$ jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux lub w sensie całki oznaczonej).
- Środek masy powyższej krzywej (o jednorodnej gęstości) ma współrzędne $(\bar{x}, \bar{y})$ dane wzorem
$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$
- Objętość bryły obrotowej $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant \sqrt{y^2+z^2} \leqslant f(x)\}$ (zakreślonej przez obrót trapezu krzywoliniowego wokół osi x) dana jest wzorem
$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx;$$
tutaj f jest nieujemną funkcją, taką że f^2 jest całkowalna (w sensie Darboux lub w sensie całki oznaczonej).
- Środek masy powyższej bryły (o jednorodnej gęstości) ma współrzędne $(\bar{x}, 0, 0)$ dane wzorem
$$\bar{x} = \frac{1}{V}\int_a^b x \cdot \pi (f(x))^2 dx.$$
- Pole powierzchni powierzchni obrotowej $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b,\ \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}$ (zakreślonej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi x) dane jest wzorem
$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$
tu f jest nieujemną funkcją różniczkowalną na (a,b) i taką, że $f\sqrt{1+(f')^2}$ jest całkowalna (w sensie Darboux lub w sensie całki oznaczonej).
- Środek masy powyższej powierzchni (o jednorodnej gęstości) ma współrzędne $(\bar{x}, 0, 0)$ dane wzorem
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x \cdot 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$