Lista zadań nr 4: całka Riemanna

(1) Udowodnij, że jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna (tj. ma całkę Darboux) i $c > 0$, zaś funkcja g spełnia warunek $|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant c|f(x_1) - f(x_2)|$ dla $x_1, x_2 \in [a,b]$, to funkcja g jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna. Wywnioskuj, że jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna, to $|f|$ jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna.

(2) Wykaż, że wyrazy ciągu danego wzorem

$$a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

są sumami całkowymi Riemanna funkcji danej wzorem $1/(1+x^2)$ na przedziale $[0,1]$ i oblicz granicę ciągu (a_n).

(3) Oblicz analogicznie

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$$

(4) Oblicz analogicznie (stosując nierównomierny podział przedziału całkowania!)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{3}{n^2+2^2} + \frac{5}{n^2+3^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2+n^2}\right).$$

(5) Niech f będzie funkcją ciągłą. Ile wynosi $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)d\mathrm{sign}(t)$?

(6) Oblicz $\displaystyle\int_a^b \sin(t)d\sin(t)$ oraz $\displaystyle\int_a^b \sin(t)d\cos(t)$.

Zadania dodatkowe

(A) Wywnioskuj z zadania (1) ogólniejsze twierdzenie: jeśli f jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux), zaś g jest różniczkowalną funkcją, której pochodna jest ciągła na $\mathbb{R}$, to $g \circ f$ jest całkowalna na $[a,b]$ (w sensie Darboux). W szczególności całkowalne są zatem funkcje dane wzorami $(f(x))^2$ czy $e^{f(x)}$. Wykorzystując wzór $f(x)g(x) = \frac{1}{4}(f(x)+g(x))^2 - \frac{1}{4}(f(x)-g(x))^2$ wykaż, że iloczyn funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna (funkcje całkowalne w sensie Riemanna tworzą zatem *algebrę*).

(B) Niech f będzie funkcją ciągłą oraz $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Wyraź w prostszy sposób całki Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b f(t)d\lfloor t \rfloor$ oraz $\int_a^b f(t)d\lceil t \rceil$.

(C) Niech df oznacza *różniczkę funkcji* f, czyli klasę równoważności funkcji w relacji równości z dokładnością do stałej, tj. $df = dg$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f - g$ jest stała; zakładamy tu, że f i g są określone na wspólnym przedziale $[a,b]$. Jeśli istnieje całka Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b f(t)dg(t)$, to określamy $f \cdot dg$ jako klasę równoważności funkcji $F(t) = \int_a^t f(s)dg(s)$. Udowodnij (przy odpowiednich założeniach — jakich?) wzory $df = f' \cdot dt$ (tutaj dt to klasa równoważności funkcji danej wzorem t), $(f \cdot g) \cdot dh = f \cdot (g \cdot dh)$, $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$, $d(f \circ h) = (f' \circ h) \cdot dh$. Skojarz te wzory z symbolicznymi zapisami przy dokonywaniu podstawień w całkach.

(D) Co trzeba założyć o okresowych funkcjach f i g, o wspólnym okresie T, aby funkcja $F(t) = \int_0^t f(s)dg(s)$ również była funkcją okresową o okresie T?

(E) Udowodnij, że jeśli w punkcie $t_0 \in (a,b)$ obie funkcje f i g są nieciągłe, to całka Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b f(t)dg(t)$ nie jest określona.

(F) Znajdź funkcje ciągłe f i g takie, że całka Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b f(t)dg(t)$ nie jest określona.