Lista zadań nr 6: szeregi o wyrazach dowolnych

(1) Niech k_n będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych oraz

$$b_n = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}.$$

Udowodnij, że jeśli szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny, a wyrazy a_n są nieujemne, to zbieżny jest również szereg $\sum_n a_n$.

(2) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_n a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_n a_n^2$?

(3) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_n a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_n a_n^3$?

(4) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_n a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_n \frac{(-1)^n a_n}{n^2}$?

(5) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_n a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_n \frac{(-1)^n a_n}{n}$?

(6) Dla a niebędącego wielokrotnością 2π znajdź i udowodnij wzór na:

$$\cos(0) + \cos(a) + \cos(2a) + \ldots + \cos(na),$$
$$\sin(a) + \sin(2a) + \ldots + \sin(na).$$

Następnie wykaż, że dla ustalonego a sumy te tworzą ciągi ograniczone.

Wskazówka: znaleźć można w książce lub przy pomocy liczb zespolonych i wzoru na sumę skończonego szeregu geometrycznego; udowodnić można indukcyjnie lub przy pomocy liczb zespolonych i wzoru na sumę skończonego szeregu geometrycznego.

(7) Zbadaj zbieżność szeregów (zakładamy, że a nie jest wielokrotnością 2π):

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\operatorname{arctg}(n)}, \qquad \sum_n \frac{\sin(an+b)}{n}, \qquad \sum_n (-1)^n n \sin(\tfrac{1}{n}),$$
$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin(\sqrt{n})},$$
$$\sum_n \frac{(-1)^n \cos(n)}{n}, \qquad \sum_n \frac{(\cos(n))^2}{n}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n (\cos(n))^2}{n}.$$

Wskazówka: $(-1)^n = \cos(n\pi)$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$.

(8) Szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny oraz $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$. Czy szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny?

(9) Czy zbieżny jest szereg $\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$?

Zadania dodatkowe

(A) Czy iloczyn Cauchy'ego dwóch takich samych szeregów $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ jest szeregiem zbieżnym?

(B) Niech $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ dla $a > 1$. Udowodnij, że jeśli $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby n, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^a} = (\zeta(a))^2$.

(C) Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ itd. Udowodnij, że iloczyn nieskończony $\prod_n \frac{1}{1 - 1/p_n}$ jest rozbieżny do ∞.

Wskazówka: zapisz $1/(1-1/p_n) = 1 + 1/p_n + 1/p_n^2 + \ldots$ i wykaż, że n-ty iloczyn cząstkowy jest większy niż n-ta suma częściowa szeregu harmonicznego.

(D) Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że szereg $\sum_n \frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny.

(E) Szereg $\sum_n a_n$ o nieujemnych wyrazach jest rozbieżny, ale jego wyrazy dążą do zera. Udowodnij, że dla dowolnego $x \geqslant 0$ istnieje ciąg (b_n) o wyrazach 0 i 1 taki, że $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n a_n) = x$.

(F) Szereg $\sum_n a_n$ o nieujemnych wyrazach jest rozbieżny, ale jego wyrazy dążą do zera. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg (b_n) o wyrazach -1 i 1 taki, że $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n a_n) = x$.

(G) Udowodnij twierdzenie Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych.

(H) Poprzestawiaj wyrazy szeregu $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ tak, aby uzyskać szereg rozbieżny.

(I) Poprzestawiaj wyrazy szeregu $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ tak, aby uzyskać szereg zbieżny do innej granicy.