Lista zadań nr 7: całki niewłaściwe

(1) Oblicz $\displaystyle\int_0^\infty e^{-pt}\cos(qt)dt$, gdy $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$.

(2) Zbadaj, w zależności od parametrów p i q, zbieżność całek:

$$\int_{0^+}^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad \int_{0^+}^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad \int_{0^+}^\infty \frac{\sin(x)}{x^p}\,dx, \qquad \int_{0^+}^\infty \frac{\cos(x)}{x^p}\,dx.$$

Pierwsza to *całka gamma*, oznaczana $\Gamma(p)$; druga to *całka beta*, oznaczana $B(p,q)$.

(3) Zachodzi:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{2}\bigg|_{x=-a}^{x=a} = \lim_{a\to\infty} 0 = 0;$$

$$\int_{-1^+}^{1^-} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln(1-x^2)}{2}\bigg|_{x=-1+\varepsilon}^{x=1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 0 = 0.$$

Czy rzeczywiście?

(4) Oblicz $\displaystyle\int_{0^+}^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.

Liczba $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ nazywana jest *stałą Catalana*; nie wiadomo, czy jest to liczba wymierna!

(5) Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[0,b]$ dla $b > 0$, a całka $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna. Czy całka $\displaystyle\int_0^\infty (f(x))^2dt$ jest zbieżna?

(6) Czy odpowiedź na pytanie z poprzedniego zadania zmieni się, gdy założymy dodatkowo, że $f(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \geqslant 0$?

(7) Czy odpowiedź na pytania z poprzednich dwóch zadań zmieni się, gdy założymy dodatkowo, że całka $\displaystyle\int_0^\infty (f(x))^3dx$ jest zbieżna?

(8) Uzasadnij, że całki $\displaystyle\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ oraz $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t^2)dt$ są zbieżne.

Są to *całki Fresnela*, obie mają wartość $\sqrt{\pi/8}$.

(9) Zbadaj zbieżność całki $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\sin(t^p)}{t^q}\,dt$ w zależności od parametrów $p, q \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: gdy $p < 0$, zastosuj podstawienie $t^p = s$.

(10) Niech f będzie malejącą funkcją na $[A, +\infty)$, zbieżną do zera w $+\infty$. Uzasadnij, że całka $\displaystyle\int_A^\infty f(t)\sin(t)dt$ jest *bezwzględnie* zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka $\displaystyle\int_A^\infty f(t)dt$.

(11) Dodatnia funkcja f jest malejąca na $[A, +\infty)$ (gdzie $A \geqslant 0$) oraz spełnia nierówność $f(e^t) \geqslant e^{-t}f(t)$. Udowodnij, że szereg $\displaystyle\sum_{n\geqslant A} f(n)$ jest rozbieżny.

Zadania dodatkowe

(A) Wykorzystaj wynik zadania (11) do rozwiązania zadania (B) z listy zadań nr 5.

(B) Udowodnij tezę z zadania (1) przy następujących założeniach: f jest dodatnia i malejąca na $[A, \infty)$, g jest różniczkowalna na $[A, \infty)$, $g(A) > A$, $g'(x) > 0$ dla $x \in [A, \infty)$ oraz $f(g(x)) \geqslant f(x)/g'(x)$.

(C) Niech $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{|\sin(x)|}}$. Czy całka $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna? Gdzie są punkty osobliwe tej całki? Jak poprawnie zdefiniować tę całkę?

(D) *Wartością główną Cauchy'ego* całki $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ z osobliwością w punkcie $x_0 \in (a, b)$ nazywamy granicę:

$$\mathrm{PV} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \right),$$

o ile granica ta istnieje; PV to skrót od ang. *principal value*. Udowodnij, że jeśli funkcja f jest ciągła na $[A, B]$ i różniczkowalna w $x_0 \in (A, B)$, to całka $\mathrm{PV} \displaystyle\int_A^B \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx$ jest zbieżna. Wywnioskuj, że jeśli f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$ oraz całka $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, to poprawnie określona jest *transformata Hilberta* funkcji f:

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{PV} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(y)}{x - y}\, dy$$

(mamy tu trzy osobliwości: zwykłe całki niewłaściwe w ∞ oraz $-\infty$, a także wartość główną Cauchy'ego całki w punkcie x).