Lista zadań nr 9: szeregi potęgowe

(1) Znajdź promień zbieżności szeregów potęgowych

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!\,x^n}{(2n)!}\,,\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n x^n}{n!}\,,\qquad \sum_{n\geqslant 0}\sin(n)x^n,\qquad \sum_{n\geqslant 1}n^n x^{n^2}.$$

Czy umiesz wyznaczyć przedziały zbieżności tych szeregów?

Wskazówka: z pierwszego semestru wiadomo, że jeśli $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=x\geqslant 0$, to $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=x$.

(2) Wyznacz tyle wyrazów, ile to możliwe, szeregu potęgowego:

$$(2+x+2x^2+x^3+\ldots)(1-2x+x^2-2x^3+\ldots).$$

Czy potrafisz odgadnąć, jakie szeregi potęgowe miał na myśli autor zadania i wyrazić ich sumę w zwartej postaci?

(3) Wyznacz tyle wyrazów, ile to możliwe, szeregu potęgowego:

$$\frac{1-2x+x^2-2x^3+\ldots}{2+x+2x^2+x^3+\ldots}\,.$$

(4) Wyznacz tyle wyrazów, ile to możliwe, złożenia (w wybranej kolejności) funkcji danych szeregami potęgowymi:

$$x-2x^2+x^3-2x^4+\ldots\qquad\text{oraz}\qquad 2x+x^2+2x^3+x^4+\ldots\,.$$

(5) Sprawdź, że szereg potęgowy o współczynnikach a_n (o dodatnim promieniu zbieżności) określa funkcję parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n=0$ dla n nieparzystych. Sformułuj podobne twierdzenie dla funkcji nieparzystych.

(6) Szereg $\sum_{n\geqslant 0}n!\,x^n$ ma zerowy promień zbieżności. Mimo to można udowodnić, że istnieje szereg $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ taki, że (formalny) iloczyn szeregów potęgowych $\left(\sum_{n\geqslant 0}n!\,x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n\right)$ jest równy jeden, tj. jest szeregiem $1+0x+0x^2+0x^3+\ldots$ Znajdź kilka pierwszych współczynników a_n.

(7) Niech $f(x)=(1-x)^a=\exp(a\ln(1-x))$ dla $x<1$. Uzasadnij, że f jest funkcją analityczną (powołując się na odpowiednie twierdzenia z wykładu). Znajdź szereg potęgowy funkcji $(1-x)^a$ o środku w zerze i wyznacz jego promień zbieżności.

Wobec analityczności f automatycznie suma tego szeregu jest równa $f(x)$!

(8) Wykorzystaj poprzednie zadanie dla $a=-\frac{1}{2}$ do wyznaczenia szeregu potęgowego funkcji $1/\sqrt{1-x^2}$. Scałkuj ten szereg wyraz po wyrazie, aby uzyskać szereg Maclaurina funkcji $\arcsin(x)$. Wywnioskuj (wykorzystując twierdzenie Abela), że:

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n+1)},\qquad \frac{\pi}{3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{16^n(2n+1)}\,.$$

10 składników ostatniego wzoru daje $\pi\approx\frac{52351312644967555}{16663940532535296}=3.14159262\ldots$ (zaś $\pi=3{,}14159265\ldots$).

(9) Zapisz szereg potęgowy funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ i scałkuj go wyraz po wyrazie, by uzyskać szereg Maclaurina funkcji $\operatorname{arctg}(x)$. Jaki jest promień zbieżności tych szeregów? Wywnioskuj (wykorzystując twierdzenie Abela), że:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,,\qquad \frac{\pi\sqrt{3}}{6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}\,.$$

(10) Wyznacz kilka pierwszych wyrazów szeregu potęgowego (o środku w 0) funkcji $f(x)=\exp(\exp(x)-1)$. Zrób to na dwa sposoby: (a) przez składanie szeregów; (b) przez obliczanie kolejnych pochodnych. Wykorzystaj to do wyznaczenia szeregu potęgowego funkcji $\exp(\exp(x))$.

Czym są liczby i wielomiany Bella?

Zadania dodatkowe

(A) Niech

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Operując tylko własnościami szeregów potęgowych, uzasadnij, że $S'(x) = C(x)$, $C'(x) = -S(x)$, $S(x+y) = S(x)C(y)+C(x)S(y)$, $C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y)$ oraz $(S(x))^2 + (C(x))^2 = 1$ (ostatnia równość łatwo wynika z przedostatniej dla $y = -x$). Udowodnij ponadto, że istnieje liczba $p > 0$ taka, że $C(x) > 0$ dla $x \in [0, p)$, lecz $C(p) = 0$.

W ten sposób formalnie definije się $\cos(x) = C(x)$, $\sin(x) = S(x)$ oraz $\pi = 2p$.

(B) Niech (d_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja f taka, że $f^{(n)}(0) = d_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. W tym celu niech h będzie dowolnie wiele razy różniczkowalną funkcją, która jest równa 1 w przedziale $[-1, 1]$ oraz 0 w zbiorze $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ (funkcja taka została skonstruowana w zadaniu dodatkowym (B) na liście zadań nr 14 w poprzednim semestrze). Niech:

$$\begin{aligned} M_n &= \sup\left\{|h^{(k)}(x)| : k < n,\ x \in \mathbb{R}\right\}, \\ \lambda_n &= 8^n n! M_n \max(1, |d_n|), \\ f_n(x) &= d_n \frac{x^n}{n!} h(\lambda_n x), \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Zauważ, że $f_n^{(k)}(0) = 0$ dla wszystkich $k \neq n$ oraz $f_n^{(n)}(0) = d_n$. Udowodnij, że jeśli $k < n$, to:

$$|f_n^{(k)}(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Następnie wykorzystaj kryterium Weierstrassa, by wywnioskować jednostajną zbieżność szeregów $\sum_n f_n^{(k)}$ i w konsekwencji równość:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}.$$

Wskazówka: udowodnij, że gdy $|x| < 2\lambda_n^{-1}$, $k < n$, to

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(x)| &\leqslant \frac{d_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(\frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j}\right) \cdot \left(\lambda_n^{k-j} M_n\right) \\ &\leqslant \frac{d_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(n! 2^n \lambda_n^{j-n}\right) \cdot \left(\lambda_n^{n-1-j} M_n\right) \\ &= d_n \cdot 2^k \cdot 2^n M_n \lambda_n^{-1}. \end{aligned}$$

(C) Niech $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} a_n) = \sqrt{3}$.