Lista zadań nr -1: aproksymacja

Zadania dodatkowe

W poniższych zadaniach $\|f\|$ oznacza normę supremum f na przedziale $[a,b]$, tj. $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$.

(A) Funkcja g jest *funkcją schodkową* na $[a,b]$, jeśli istnieje podział $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ przedziału $[a,b]$ taki, że g jest stała na każdym z przedziałów (x_{j-1}, x_j), gdzie $j = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że dla każdej funkcji ciągłej f na $[a,b]$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa g o własności $\|f - g\| < \varepsilon$.

(B) Funkcja g jest *kawałkami liniowa* na $[a,b]$, jeśli istnieje podział $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ przedziału $[a,b]$ taki, że g jest funkcją liniową na każdym z przedziałów $[x_{j-1}, x_j]$, gdzie $j = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że dla każdej funkcji ciągłej f na $[a,b]$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje kawałkami liniowa funkcja g o własności $\|f - g\| < \varepsilon$.

(C) Czy funkcje schodkowe tworzą zbiór gęsty w $\mathscr{C}([a,b])$? Czy funkcje kawałkami liniowe tworzą zbiór gęsty w $\mathscr{C}([a,b])$?

(D) Niech (P_n) będzie ciągiem sum częściowych szeregu Taylora funkcji $h(x) = \sqrt{x}$ wokół $x_0 = 1$. Z zadania 7 z listy 9 wynika, że promień zbieżności tego szeregu to 1 oraz że granicą ciągu $(P_n(x))$ jest $h(x)$ dla $x \in (0,2)$. Udowodnij, że ciąg $(P_n(x))$ jest zbieżny również dla $x = 0$ i ponadto $(P_n(x))$ jest ciągiem malejącym dla każdego $x \in [0,1]$. Wywnioskuj z twierdzenia Diniego, że ciąg (P_n) jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$ do funkcji h.

(E) Wykorzystując powyższy ciąg (P_n), skonstruuj ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do: (a) funkcji $g(x) = |x|$ na przedziale $[-1,1]$; (b) funkcji $g(x) = p|x - q|$ na przedziale $[a,b]$, gdzie $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

(F) Uzasadnij, że każda funkcja kawałkami liniowa jest sumą funkcji postaci $p|x - q|$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$. Wywnioskuj, że każda funkcja kawałkami liniowa na $[a,b]$ jest granicą jednostajną ciągu wielomianów. Wywnioskuj, że każda funkcja ciągła na $[a,b]$ jest granicą jednostajną ciągu wielomianów (tw. Weierstrassa).

(G) Wywnioskuj, że każdą funkcję ciągłą na $[0,\infty)$, posiadającą granicę w ∞, można jednostajnie przybliżać przy pomocy kombinacji liniowych funkcji wykładniczych e^{-ax}, gdzie $a \geqslant 0$ (a nawet e^{-nx}, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).
Wskazówka: rozważ $g(x) = f(-\ln(x))$, $x \in (0,1]$.

(H) Wywnioskuj, że każdy zbieżny ciąg (a_n) można jednostajnie przybliżać przy pomocy kombinacji liniowych ciągów geometrycznych.

(I) Udowodnij twierdzenie Diniego.

(J) Udowodnij twierdzenie Abela (dla szeregów potęgowych).

(K) Niech f będzie funkcją ciągłą na $[-1,1]$. Zauważ, że dla danego $n \in \mathbb{N}$ oraz ustalonych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian Q_n stopnia n, który jest równy f w tych punktach — jest to tzw. *wielomian interpolacyjny.* Udowodnij, że

$$|f(x) - Q_n(x)| = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)$$

dla odpowiedniego punktu pośredniego c.

(L) Wywnioskuj, że wielomiany interpolacyjne funkcji $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = e^{-x^2}$ z równo rozłożonymi węzłami (tj. $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$) dążą jednostajnie do funkcji f.

(M) Narysuj wykresy początkowych wielomianów interpolacyjnych funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$ z równo rozłożonymi węzłami (*przykład Rungego*). Czy wielomiany te dążą jednostajnie do funkcji f?

(N) Poczytaj o wielomianach interpolacyjnych z węzłami Czebyszewa — taki wybór węzłów (w pewnym sensie) minimalizuje błąd interpolacji.