Teoria potencjału procesów Markowa — lista zadań nr 3

(1) Niech $\mathscr{F}$ będzie σ-algebrą generowaną przez zamkniętą ze względu na branie skończonych przekrojów rodzinę podzbiorów $\mathscr{F}_0$. Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}(X;F) = \mathbb{E}(Y;F)$ dla $f \in \mathscr{F}_0$, to $\mathbb{E}(X;F) = \mathbb{E}(Y;F)$ dla $f \in \mathscr{F}$. Wywnioskuj, że jeśli zmienna losowa Y jest $\mathscr{F}$-mierzalna, to $Y = \mathbb{E}(X|\mathscr{F})$.

(2) Uzasadnij, że warunkowa wartość oczekiwana jest ciągłym operatorem na $\mathscr{L}^1$ (przestrzeni zmiennych losowych o skończonej średniej).

(3) Niech X_t będzie ruchem Browna startującym z 0. Określmy $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^d$ oraz $\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = x + X_t(\omega)$ gdy $\tilde{\omega} = (\omega, x) \in \tilde{\Omega}$. Niech ponadto $\mathbb{P}^x$ będzie obrazem miary $\mathbb{P}$ przez odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto (\omega, x) \in \tilde{\Omega}$. Uzasadnij, że tak skonstruowany proces jest ruchem Browna startującym z dowolnego punktu (równoważnie: dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ proces $X_t - x$ z miarą $\mathbb{P}^x$ jest ruchem Browna startującym z zera).

Niech t_n $(n \geq 1)$ będzie ciągiem dodatnich liczb wymiernych, $t_0 = 0$. Niech ξ_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych o d-wymiarowym rozkładzie normalnym $N(0, 2I)$. Określamy rekurencyjnie:

$$\begin{cases} X_{t_0} = 0 & \\ X_{t_n} = X_{t_i} + \sqrt{t_n - t_i}\,\xi_n & \text{gdy } t_n > t_i = \max(t_0, ..., t_{n-1}), \\ X_{t_n} = \frac{t_j - t_n}{t_j - t_i} X_{t_i} + \frac{t_n - t_i}{t_j - t_i} X_{t_j} + \sqrt{\frac{(t_n - t_i)(t_j - t_n)}{t_j - t_i}}\,\xi_n & \text{gdy } t_n \in (t_i, t_j),\ t_0, t_1, ..., t_{n-1} \notin (t_i, t_j). \end{cases}$$

(4) Sprawdź, że jesli X, Y mają ten sam d-wymiarowy rozkład normalny i są niezależne, to $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne.

(5) Udowodnij, że skonstruowany wyżej proces $(X_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty))$ ma niezależne przyrosty. Wykaż, że X_t ma rozkład normalny $N(0, 2tI)$.

(6) Udowodnij, że jeśli $Z_1, ..., Z_n$ są niezależnymi zmiennymi o tym samym symetrycznym rozkładzie oraz $X_k = Z_1 + ... + Z_k$, to $\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \geq x) \leq 2\mathbb{P}(X_n \geq x)$ dla $x > 0$ (zasada odbicia).

(7) Udowodnij, że dla procesu $(X_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty))$ skonstruowanego powyżej oraz $N > 0$, $x > 0$ zachodzi:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\sup\{|X_{t+s} - X_t| : 0 \leq t < N, 0 < s < \tfrac{1}{n}\} > 2x) \\ &\quad \leq \mathbb{P}(\sup\{|X_{j/n+s} - X_{j/n}| : 0 \leq j < Nn, 0 < s < \tfrac{2}{n}\} > x) \\ &\quad \leq Nn\mathbb{P}(\sup\{|X_s| : 0 < s < \tfrac{2}{n}\} > x) \\ &\quad \leq 4Nn\mathbb{P}(X_{2/n} > x) \to 0 \end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$. Wywnioskuj, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie X_t rozszerzają się do funkcji ciągłych na $[0, \infty)$.

(8) Wykaż, że rozszerzenie X_t z poprzedniego zadania jest ruchem Browna.

Niech $(X_t : t \in [0, \infty))$ będzie rodziną zmiennych losowych, $\mathbb{P}^x$ rodziną prawdopodobieństw. Wprowadzamy *prawdopodobieństwa przejścia*:

$$p_t(x, A) = \mathbb{P}^x(X_t \in A).$$

Rozważamy własność:

$$\text{(M)} \qquad \begin{aligned} &\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n) \\ &\quad = \int_{A_1} p_{t_1}(x, dx_1) \int_{A_2} p_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_n} p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \end{aligned}$$

gdy $0 < t_1 < ... < t_n$. Własność (M) implikuje własność Markowa: jeśli $0 < s_1 < ... < s_m < s < s + t_1 < ... < s + t_n$ i $B_1, ..., B_n$ są borelowskie, to

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t_1} \in B_1, ..., X_{s+t_n} \in B_n | (X_{s_1}, ..., X_{s_m}, X_s)) = \varphi(X_s),$$

gdzie

$$\varphi(y) = \mathbb{P}^y(X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n).$$

Wprowadźmy σ-algebry:

$$\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0, t]\}.$$

(9) Wykaż, że jeśli X i $Y - X$ są niezależnymi zmiennymi o gęstościach g_X i g_{Y-X}, to wektor (X, Y) ma gęstość $g_X(x) g_{Y-X}(y - x)$.

(10) Udowodnij, że każdy proces o niezależnych i stacjonarnych przyrostach ma własność (M).

(11) Przypomnij definicję π-układu, λ-układu i lematu Dynkina o π-λ-układach.

(12) Sprawdź, że z własności Markowa wynika, że

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t_1} \in B_1, ..., X_{s+t_n} \in B_n | \mathscr{F}_s) = \varphi(X_s).$$

(13) Sprawdź, że z własności Markowa wynika, że dla dowolnej ograniczonej funkcji mierzalnej Φ zachodzi:

$$\mathbb{E}^x(\Phi(X_{s+t_1}, ..., X_{s+t_n}) | \mathscr{F}_s) = \varphi(X_s),$$

gdzie

$$\varphi(y) = \mathbb{E}^y(\Phi(X_{t_1}, ..., X_{t_n})).$$