Rosnącą rodzinę σ-algebr $\mathscr{F}_t$ ($t \in [0,\infty]$) na ustalonej przestrzeni Ω nazywamy *filtracją*. Określamy ponadto

$$\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s\in(t,\infty]} \mathscr{F}_s, \qquad \mathscr{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s\in[0,t)} \mathscr{F}_s\right).$$

Tu $\sigma(\mathscr{F})$ oznacza najmniejszą σ-algebrę zbiorów, która zawiera $\mathscr{F}$. Mówimy, że filtracja $\mathscr{F}_t$ jest *prawostronnie ciągła*, jeśli $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$. Analogicznie definiujemy pojęcie filtracji *lewostronnie ciągłej*. Jeśli X_t jest rodziną zmiennych losowych, to filtracja zdefiniowana wzorami

$$\begin{cases} \mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\} & \text{dla } t \in [0,\infty), \\ \mathscr{F}_\infty = \sigma\{X_s : s \in [0,\infty)\}, \end{cases}$$

nazywana jest *filtracją naturalną* procesu X_t. Tu $\sigma\{X_s : s \in [0,t]\} = \sigma\{X_s \in A : s \in [0,t], A \in \mathscr{B}\}$, gdzie $\mathscr{B}$ jest σ-algebrą zbiorów mierzalnych w zbiorze wartości X_t (zwykle: σ-algebrą zbiorów borelowskich).

(1) Sprawdź, że $\mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{t-}$ też są filtracjami.

(2) Czym jest $\mathscr{F}_{0-}$? Czym jest $\mathscr{F}_{\infty+}$?

(3) Niech $\Omega = [0,\infty)$ i niech $\mathscr{M}$ będzie σ-algebrą zbiorów borelowskich na Ω. Sprawdź, że rodzina $\mathscr{F}_t = \{M \in \mathscr{M}(\Omega) : [t,\infty) \subseteq M \text{ lub } M \cap [t,\infty) = \varnothing\}$ jest filtracją. Wyznacz $\mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{t-}$.

(4) Wskaż proces X_t, dla którego $\mathscr{F}_t$ z poprzedniego zadania jest naturalną filtracją.

(5) Wskaż rodzinę prawdopodobieństw $\mathbb{P}^x$ i proces X_t mający własność Markowa, dla których $\mathscr{F}_t$ z zadania 3 jest naturalną filtracją.

(6) Opisz filtrację naturalną (deterministycznego) procesu $X_t = t$.

Mówimy, że zmienna losowa τ o wartościach w $[0,\infty]$ jest $(\mathscr{F}_t)$-*czasem Markowa*, jeśli $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ dla wszystkich $t \in [0,\infty]$. Jeśli τ jest $(\mathscr{F}_{t+})$-czasem Markowa, to mówimy po prostu, że τ jest *czasem Markowa*. Ponadto określamy

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\tau &= \{M \in \mathscr{F}_\infty : M \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \text{ dla } t \in [0,\infty]\}, \\ \mathscr{F}_{\tau+} &= \{M \in \mathscr{F}_\infty : M \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_{t+} \text{ dla } t \in [0,\infty]\}, \\ \mathscr{F}_{\tau-} &= \sigma\{M \cap \{\tau > t\} : t \in [0,\infty],\ M \in \mathscr{F}_t\} \end{aligned}$$

(definicja $\mathscr{F}_\tau$ ma sens dla $(\mathscr{F}_t)$-czasów Markowa, $\mathscr{F}_{\tau+}$ jest σ-algebrą dla wszystkich czasów Markowa, definicja $\mathscr{F}_{\tau-}$ ma sens dla dowolnych τ, ale w praktyce stosuje się ją tylko dla czasów Markowa).

(7) Sprawdź, że jeśli τ jest $(\mathscr{F}_t)$-czasem Markowa, to $\{\tau < t\}, \{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$.

(8) Sprawdź, że τ jest czasem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$ dla $t \in [0,\infty]$. W szczególności $(\mathscr{F}_t)$-czasy Markowa są czasami Markowa. Sprawdź ponadto, że

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \{M \in \mathscr{F}_\infty : M \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t \text{ dla } t \in [0,\infty]\}.$$

(9) Sprawdź, że czas deterministyczny (tj. $\tau = t$) jest $(\mathscr{F}_t)$-czasem Markowa.

(10) Sprawdź, że jeśli $\mathscr{F}_t$ jest naturalną filtracją procesu X_t, to $\mathscr{F}_{\tau-}$ jest σ-algebrą generowaną przez zbiory postaci

$$\{X_{t_1} \in A_1,\, X_{t_2} \in A_2,\, ...,\, X_{t_n} \in A_n,\, \tau > t_n\},$$

gdzie A_1, ..., A_n są zbiorami borelowskimi oraz $0 \leq t_1 < ... < t_n$. Sprawdź ponadto, że rodzina powyższych zbiorów jest zamknięta ze względu na branie przekrojów skończenie wielu zbiorów.

(11) Sprawdź, że $\mathscr{F}_\tau$ i $\mathscr{F}_{\tau+}$ są σ-algebrami dla odpowiednich czasów τ.

(12) Sprawdź, że $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ dla czasów Markowa oraz $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ dla $(\mathscr{F}_t)$-czasów Markowa.

(13) Sprawdź, że jeśli $\tau = t$ jest czasem deterministycznym, to $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$, $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{\tau-} = \mathscr{F}_{t-}$.

(14) Sprawdź, że jeśli τ jest czasem Markowa, to τ jest $\mathscr{F}_{\tau-}$-mierzalny.

(15) Udowodnij, że jeśli τ i σ są czasami Markowa, to $\tau + \sigma$ jest czasem Markowa.

(16) Udowodnij, że jeśli τ_n to ciąg czasów Markowa, to $\sup \tau_n$, $\inf \tau_n$, $\limsup \tau_n$ oraz $\liminf \tau_n$ są czasami Markowa.

(17) Sprawdź, że jeśli τ i σ są czasami Markowa oraz $\tau \leq \sigma$, to $\mathscr{F}_{\tau+} \subseteq \mathscr{F}_{\sigma+}$ oraz $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_{\sigma-}$. Sprawdź też, że jeśli τ i σ są czasami $(\mathscr{F}_t)$-Markowa, to ponadto $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_\sigma$.

(18) Udowodnij, że jeśli τ i σ są czasami Markowa oraz $\tau < \sigma$, to $\mathscr{F}_{\tau+} \subseteq \mathscr{F}_{\sigma-}$.