Teoria potencjału procesów Markowa — lista zadań nr 5

Niech $T \subseteq [0, \infty)$ będzie przeliczalnym zbiorem czasów, X_t — rodziną nieujemnych zmiennych losowych ($t \in T$), $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : s \in T, s \leq t\}$. Mówimy, że X_t jest (nieujemnym) supermartyngałem, jeśli $\mathbb{E}(X_{s+t}|\mathscr{F}_s) \leq X_s$ dla wszystkich $t, s \geq 0$.
Twierdzenie (lemat Dooba). Średnia łączna liczba przejść w górę (nieujemnego) supermartyngału ze stanu poniżej a do stanu powyżej b supermartyngału X_t nie przekracza $a/(b-a)$.

(1) Udowodnij, że (nieujemny) supermartyngał X_t ma z prawdopodobieństwem 1 odpowiednie granice jednostronne w każdej chwili z domknięcia T.

Niech $\mathscr{X}$ będzie lokalnie zwartą ośrodkową przestrzenią metryzowalną, zaś $\mathscr{X}_\infty = \mathscr{X} \cup \{\infty\}$ jej jednopunktowym uzwarceniem. W $\mathscr{X}_\infty$ zbiór G jest otwarty, jeśli nie zawiera ∞ i jest otwarty w $\mathscr{X}$ lub jeśli zawiera ∞ i $\mathscr{X} \setminus G$ jest zwarty w $\mathscr{X}$.

Definiujemy $C_c(\mathscr{X})$ jako zbiór funkcji ciągłych równych zero poza pewnym zbiorem zwartym w $\mathscr{X}$ oraz $C_0(\mathscr{X})$ jako domknięcie $C_c(\mathscr{X})$ w topologii zbieżności jednostajnej na $\mathscr{X}$.

Rodzina jąder $p_t(x, A)$ nazywana jest *fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia* na $\mathscr{X}$, jeśli $p_t(x, \cdot)$ jest borelowską miarą podprobabilistyczną na $\mathscr{X}$, $p_0(x, dy) = \delta_x(dy)$, operator $p_t f(x) = \int p_t(x, dy) f(y)$ przekształca $C_0(\mathscr{X})$ w $C_0(\mathscr{X})$ oraz dla każdego $f \in C_0(\mathscr{X})$ funkcja $p_t f$ zależy w sposób ciągły od czasu $t \in [0, \infty)$ (w topologii zbieżności jednostajnej).

(2) Sprawdź, że funkcje ciągłe na $\mathscr{X}_\infty$ są postaci $a + f(x)$ dla $f \in C_0(\mathscr{X})$ (z konwencją $f(\infty) = 0$).

(3) Udowodnij, że $\mathscr{X}_\infty$ jest zwartą, ośrodkową przestrzenią metryzowalną.

(4) Udowodnij, że każda skończona nieujemna miara borelowska μ na $\mathscr{X}$ jest wewnętrznie regularna, tj. dla wszystkich borelowskich A wielkość $\mu(A)$ jest równe supremum $\mu(K)$, gdzie K przebiega zwarte podzbiory A.

(5) Przypuśćmy, że T jest przeliczalny i gęsty w $[0, \infty)$, zaś proces Markowa X_t ($t \in T$) ma fellerowskie prawdopodobieństwa przejścia p_t oraz jednostronne granice w każdej chwili. Niech $Y_t = X_{t+}$ dla $t > 0$. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 proces Y_t jest prawostronnie ciągły, ma lewostronne granice i jest procesem Markowa z prawdopodobieństwami przejścia p_t.

Niech I będzie zbiorem indeksów i niech $\mathscr{X}^I$ oznacza przestrzeń dowolnych funkcji z I do $\mathscr{X}$. Dla $i \in I$, $J \subseteq I$, $J_1 \subseteq J_2 \subseteq I$ określamy $\pi_i : \mathscr{X}^I \to X$ wzorem $\pi_i(x) = x(i)$, $\pi_J : \mathscr{X}^I \to X^J$ wzorem $\pi_J(x)(j) = x(j)$ ($j \in J$) oraz $\pi_{J_1,J_2} : \mathscr{X}^{J_2} \to \mathscr{X}^{J-1}$ wzorem $\pi_{J_1,J_2}(x)(j) = x(j)$ ($j \in J_1$).

Mówimy, że rodzina rozkładów μ_J na $\mathscr{X}^J$ dla skończonych $J \subseteq I$ jest *zgodna*, jeśli $\mu_{J_2} \circ \pi^{-1}_{J_1,J_2} = \mu_{J_1}$ o ile $J_1 \subseteq J_2 \subseteq I$.

(6) Sprawdź, że rodzina $\mathscr{B}_0$ składająca się z przeciwobrazów zbiorów borelowskich w $\mathscr{X}^J$ przez π_J dla skończonych J jest algebrą zbiorów, zaś $\mu(\pi_J^{-1}(A)) = \mu_J(A)$ określa skończenie addytywną miarę na $\mathscr{B}_0$.

(7) Udowodnij, że jeśli J_n jest wstępującym ciągiem skończonych podzbiorów I, $K_n \in \mathscr{X}^{J_n}$ jest zwarty i niepusty oraz $\pi^{-1}_{J_n,J_{n+1}}(K_n) \supseteq K_{n+1}$, to $\bigcap \pi^{-1}_{J_n}(K_n) \neq \varnothing$.

(8) Udowodnij, że jeśli J_n jest wstępującym ciągiem skończonych podzbiorów I, $F_n \in \mathscr{X}^{J_n}$ oraz $\bigcap \pi^{-1}_{J_n}(F_n) = \varnothing$, to $\mu(F_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$.

(9) Wywnioskuj, że miara μ jest σ-addytywna na $\mathscr{B}_0$.

(10) Udowodnij, że μ rozszerza się do miary na σ-algebrze generowanej przez $\mathscr{B}_0$, spełniającej warunek $\mu(\pi_J^{-1}(A)) = \mu_J(A)$ dla skończonych $J \subseteq I$ oraz borelowskich $A \subseteq \mathscr{X}^J$.