(1) Sprawdź, że łańcuchy Markowa z czasem ciągłym na skończonej przestrzeni stanów są procesami Fellera. Powiąż prawdopodobieństwa przejścia $p_t(x, dy)$ łańcucha Markowa z jego macierzą przejścia.

Rozważmy jądro $\nu(x, dy)$ na $\mathscr{X}$ (a więc $\nu(x, \cdot)$ jest miarą na $\mathscr{X}$ oraz $\nu(\cdot, A)$ jest funkcją borelowską na $\mathscr{X}$). Przypuśćmy, że $K > 0$ oraz $\nu(x, \mathscr{X}) \leq K$. Określmy rodzinę miar probabilistycznych

$$q(x, A) = \tfrac{1}{K}(\nu(x, A) + (K - \nu(x, \mathscr{X}))\delta_x(A)).$$

Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością K i niech Z_n będzie niezależnym od N_t łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym o prawdopodobieństwie przejścia $q(x, dy)$. Mówimy, że $X_t = Z_{N_t}$ jest *regularnym krokowym procesem Markowa* albo *łańcuchem Markowa z czasem ciągłym*. Jeśli $\mathscr{X} = \mathbb{R}^d$ oraz $\nu(x, A) = \nu(A - x)$, to X_t nazywamy *złożonym procesem Poissona*.

(2) Przypomnij definicję procesu Poissona z intensywnością $K > 0$ i sprawdź, że jest to łańcuch Markowa z czasem ciągłym, który jest procesem Fellera na zbiorze liczb naturalnych (z zerem).

(3) Podaj przykład łańcucha Markowa z czasem ciągłym na dyskretnej, przeliczalnej przestrzeni stanów, który nie jest procesem Fellera.

(4) Sprawdź, że proces Poissona z intensywnością $K > 0$ jest procesem Fellera i znajdź jego jądro λ-potencjału.

(5) Sprawdź, że każdy złożony proces Poissona jest procesem Fellera. Zapisz jego prawdopodobieństwa przejścia oraz jądra λ-potencjału przy pomocy odpowiedniego szeregu, który zawiera n-krotne sploty miary ν ($\nu^{*n} = \nu * \nu * ... * \nu$).

(6) Zapisz prawdopodobieństwa przejścia i jądra λ-potencjału dla dowolnego łańcucha Markowa z czasem ciągłym przy pomocy odpowiedniego szeregu, który zawiera n-krotne złożenia jąder q:

$$q^0(x, A) = \delta_x(A), \qquad q^{n+1}(x, A) = \int_{\mathscr{X}} q^n(y, A) q(x, dy).$$

Zapisz te wzory przy pomocy jąder $\tilde{\nu}(x, A) = \nu(x, A) - \nu(x, \mathscr{X})\delta_x(A)$ i ich złożeń.

(7) Niech $\Omega = \mathbb{R}$, $X_t(\omega) = \omega + t$ oraz $\mathbb{P}^x(\{x\}) = 1$. Sprawdź, że X_t jest procesem Fellera (nazywanym *ruchem jednostajnym w prawo* lub żartobliwie *uniwersalnym kontrprzykładem*) i wyznacz jego prawdopodobieństwa przejścia i jądra λ-potencjału.

(8) Znajdź transformatę Fouriera jądra λ-potencjału $u_\lambda(x, dy)$ ruchu Browna w $\mathbb{R}^d$. Wyraź gęstość $u_\lambda(x, dy)$ przy pomocy odpowiedniej całki (wynik nie wyraża się przez funkcje elementarne, można go zapisać przy pomocy zmodyfikowanej funkcji Bessela drugiego rodzaju $K_{d/2-1}$).

(9) Niech $X_t(\omega)$ będzie procesem Fellera, i niech $Y_t(s, \omega) = (s + t, X_t(\omega))$ będzie procesem czasoprzestrzennym, z rodziną prawdopodobieństw $\mathbb{P}^{s,x}$ na $\mathbb{R} \times \Omega$ daną wzorem $\mathbb{P}^{s,x}(A \times M) = \delta_s(A)\mathbb{P}^x(M)$. Sprawdź, że Y_t jest procesem Fellera. Wyraź prawdopodobieństwa przejścia i jądra λ-potencjału Y_t przy pomocy prawdopodobieństw przejścia X_t.

Niech B_t będzie d-wymiarowym ruchem Browna i niech $X_t = e^{-t}B_{(e^{2t}-1)/2}$. Proces X_t nazywany jest *procesem Ornsteina–Uhlenbecka*.

(10) Oczywiście X_t ma ciągłe trajektorie i $\mathbb{P}^x(X_t = x) = 1$. Sprawdź, że X_t jest procesem Fellera, czyli spełnia własność (M) z fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia. Wyznacz to prawdopodobieństwa przejścia.

(11) Wyznacz rozkład graniczny X_t gdy $t \to \infty$.

(12) Powyższa definicja procesu Ornsteina–Uhlenbecka jest dość sztuczna. Znajdź (w literaturze, w Internecie) inne definicje: przez stochastyczne równanie różniczkowe oraz przez odpowiednią całkę (wykładniczą średnią kroczącą) z ruchu Browna.

Jeśli X_t jest procesem Fellera na $\mathscr{X}$, zaś μ nieujemną miarą na $\mathscr{X}$, to określamy $\mathbb{P}^\mu(M) = \int_{\mathscr{X}} \mathbb{P}^x(M)\mu(dx)$. Jeśli $\mathbb{P}^\mu(X_t \in A) = \mu(A)$, to μ nazywamy rozkładem stacjonarnym X_t.

(13) Uzasadnij, że $\mathbb{P}^\mu$ jest miarą na $\mathscr{F}_\infty$ (probabilistyczną, jeśli μ jest probabilistyczna).

(14) Niech X_t będzie ruchem Browna w $\mathbb{R}^d$, a μ — miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d$. Wyznacz $\mathbb{P}^\mu(X_t \in A)$ dla borelowskich A.

(15) Niech X_t będzie procesem Ornsteina–Uhlenbecka w $\mathbb{R}^d$, zaś μ standardowym rozkładem normalnym w $\mathbb{R}^d$. Znajdź $\mathbb{P}^\mu(X_t \in A)$.

(16) Niech B_t będzie d-wymiarowym ruchem Browna, nie $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$ i niech $X_t = e^{-t}B_{e^{2t}/2}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Sprawdź, że X_t ma standardowy rozkład normalny dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz że X_t spełnia własność (M) na $\mathbb{R}$ z prawdopodobieństwami przejścia procesu Ornsteina–Uhlenbecka w $\mathbb{R}^d$.