WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

DR HAB. MATEUSZ KWAŚNICKI

Teoria potencjału procesów Markowa

NOTATKI SPORZĄDZIŁ: JACEK MUCHA

WROCŁAW 2015

Spis treści

1 Elektrostatyka **3**
1.1 Istnienie i własności funkcji Greena $G_D(x,y)$ i jądra Poissona $P_D(x,z)$ 5

2 Ruch Browna **6**
2.1 Warunkowa wartość oczekiwana 6

3 Ruch Browna **6**
3.1 Konstrukcja 7
3.2 Przestrzeń Wienera 7

4 Własność Markowa **7**

5 Czasy Markowa **8**

6 Mocna własność Markowa **11**
6.1 Procesy Fellera 12

Klasyczna Teoria Potencjału

- Klasyczna teoria potencjału (słowo kluczowe: laplasjan, Δ)
- Probabilistyczna teoria potencjału (Brownian Motion, BM)
- Probabilistyczna ogólna teoria potencjału (Markov Processes, MP)

Uwaga notacyjna. Należy zachować ostrożność przy odróżnianiu x i $\vec{x}$, w pewnym bowiem momencie przestaniemy pisać strzałkę nad wektorem.

1 Elektrostatyka

Oznaczenia: $\vec{E}$ - pole elektrostatyczne, μ - rozkład ładunku (nie zależy od czasu, $\vec{B} = \vec{J} = 0$).

Prawo 1.1 (Coulomba)**.** Załóżmy, że

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mu|}{1+|\vec{y}|^2} dy < \infty. \tag{1}$$

Wtedy zachodzi tzw. Prawo Coulomba

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \mu(dy) \tag{2}$$

Obserwacja 1.2.

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} = \nabla_y U(\vec{x},\vec{y}), \tag{3}$$

gdzie

$$U(\vec{x},\vec{y}) = U(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}. \tag{4}$$

Stąd

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_y U(\vec{x},\vec{y}) \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}^3} (-\nabla_x U(\vec{x},\vec{y})) \mu(dy) \stackrel{!}{=} -\nabla \int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x},\vec{y}) \mu(dy). \tag{5}$$

Definicja 1.1. Potencjałem miary μ (potencjałem Newtona) nazwiemy wielkość daną wzorem

$$U_\mu(\vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x},\vec{y}) \mu(dy). \tag{6}$$

Ogólniej, dla $d \geqslant 3$, dla $U(x,y) = U(x-y) = \frac{1}{(d-2)|\partial B(0,1)|} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}$ mamy

$$\nabla_y U(x,y) = \frac{1}{(d-2)|\partial B(0,1)|} \frac{x-y}{|x-y|^d}. \tag{7}$$

Fakt 1.3. $\int_\gamma \vec{E}(\vec{x}) d\vec{x} = U_\mu(\vec{x}_2) - U_\mu(\vec{x}_1)$, gdzie krzywa γ łączy $\vec{x}_1$ z $\vec{x}_2$.

Dowód. $\vec{E}(\vec{x}) - \nabla U_\mu(\vec{x})$, a stąd $\int \vec{E}(\vec{x}(t)) \vec{x}\prime(t) dt = -U_\mu(\vec{x}(t))$. □

Fakt 1.4. Pole elektryczne jest bezwirowe, tzn.

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \tag{8}$$

Dowód. Wynika z faktu, że $\nabla \times \nabla f = \vec{0}$. □

Definicja 1.2. Przypomnienie.

1. Gradientem funkcji f nazywamy wielkość $\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_d f)$.
2. Dywergencją pola $\vec{E}$ nazywamy wielkość $\nabla \cdot \vec{E} = \partial_1 E_1 + \cdots + \partial_d E_d$.
3. Rotacją pola $\vec{E}$ (wirowością) nazywamy wielkość $\nabla \times \vec{E} = (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1)$.

Twierdzenie 1.5.

$$\vec{E} = -\nabla V \iff \nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie o Dywergencji)**.** Niech $D \subset \mathbb{R}^3$ będzie zwartym obszarem dodatnio zorientowanym o brzegu kawałkami gładkim oraz $\vec{F}$ będzie polem wektorowym klasy C^1 określonym na otwartym zbiorze zawierającym D. Wtedy

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F}(\vec{y})dy = \oint_{\partial D} \vec{F}(\vec{z}) \cdot d\vec{n}_{\vec{z}}, \tag{9}$$

gdzie $\vec{n}_{\vec{z}}$ jest wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz D. Twierdzenie to mówi o tym, ile pola "powstaje wewnątrz D".

Twierdzenie 1.7 (Trzeci Wzór Greena)**.** Przy spełnionych założeniach poprzedniego twierdzenia oraz dla f klasy C^2, zachodzi wzór

$$f(\vec{x}) = -\int_D U(\vec{x},\vec{y})\Delta f(\vec{y})d\vec{y} + \oint_{\partial D} U(\vec{x},\vec{z})\nabla f(\vec{z}) - f(\vec{z})\nabla_y U(\vec{x},\vec{z}) \cdot d\vec{n}_{\vec{z}}. \tag{10}$$

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 1.6 oraz z faktu, że laplasjan $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, tzn. $\Delta f = \partial_1^2 f + \cdots + \partial_d^2 f$.

$$\vec{F}(\vec{y}) = U(\vec{x},\vec{y})\nabla f(\vec{y}) - f(\vec{y})\nabla_y U(\vec{x},\vec{y}).$$

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{y}) = \nabla_y U \cdot \nabla f + Y \cdot \nabla\nabla f - \nabla f \cdot \nabla_y U - f\nabla_f \cdot \nabla_f U = U\Delta f - f\Delta_y U.$$

Ćwiczenie 1.1. Dla $\vec{x} \neq \vec{y}$ zachodzi $\Delta_y U(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Zastosujemy Twierdzenie o Dywergencji dla $D \setminus B(x,\varepsilon)$.

$$RHS = -\int_D U(\vec{x},\vec{y})\Delta f(\vec{y})dy + \int_{D\setminus B(\vec{x},\varepsilon)} + \oint_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} (U(\vec{x},\vec{z})\nabla f(\vec{z}) - f(\vec{z})\nabla_y \vec{x},\vec{z})) \cdot \vec{n}_{\vec{z}} =$$

$$= -\int_{B(\vec{x},\varepsilon)} U(\vec{x},\vec{y})\Delta f(\vec{y})dy + c_d\varepsilon^{-d+2} \oint_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} f(\vec{z}) \frac{1}{|\partial B(0,1)|} \frac{-\varepsilon}{\varepsilon^d} d\vec{z}$$

. Zauważmy, że $\vec{n} = \frac{\vec{z}-\vec{x}}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$, stąd

$$RHS = -\int_{B(\vec{x},\varepsilon)} (U(\vec{x},\vec{y}) - c_d\varepsilon^{-d+2})\Delta f(\vec{y})dy + \oint_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} \frac{1}{|B(\vec{x},\varepsilon)|} f(\vec{z})dz.$$

Pierwsza całka dąży do 0 przy $\varepsilon \to 0^+$, bo pierwszy składnik nie zależy od ε, podczas gdy całkujemy go po malejącej do zbioru pustego kuli, natomiast drugi składnik rośnie do ∞ wolniej niż kurczy się kula. Z kolei całka krzywoliniowa, z ciągłości f, dąży do $f(\vec{x})$, co kończy dowód, bo $RHS \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} LHS$. □

$\vec{E} = -\nabla(U\mu)$. Ze wzoru Greena:

$$U_\mu(\vec{x}) = -\int_D U(\vec{x},\vec{y})\Delta(U\mu)(\vec{y})d\vec{y} + \oint_{\partial D} (-U(\vec{x},\vec{z})\vec{E}(\vec{z}) - U\mu(\vec{z})\nabla_y U(\vec{x},\vec{z})) \cdot d\vec{n}_{\vec{z}}.$$

Zauważmy, że $-U(\vec{x},\vec{z}) \sim \frac{1}{z}$, $\vec{E}(\vec{z}) \sim \frac{1}{z^2}$, $U\mu(\vec{z}) \sim \frac{1}{z}$, zaś $\nabla_y U(\vec{x},\vec{y}) \sim \frac{1}{z^2}$. Jeśli przyjmiemy $D = B(0,R)$, $R \to \infty$ $\rightsquigarrow U_\mu(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^d} U(\vec{x},\vec{y})\Delta(U\mu)(\vec{y})dy$. W tym przypadku, jeśli U_μ nie jest klasy C^2, to można spleść μ z gładką funkcją ϕ, co daje

$$U(\mu * \phi)(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^d} U(\vec{x},\vec{y})\Delta(U(\mu*\phi))(\vec{y})d\vec{y} = -U(\Delta U(\mu*\phi))(\vec{x})$$

$$-U(\mu*\phi) = U(\Delta U(\mu*\phi))$$

U jest operatorem różnowartościowym, bo $U(\psi) = 0 \Rightarrow -\Delta U\psi = 0 \Rightarrow -U(\Delta\psi) = 0$ i z 3. Wzoru Greena $\psi = 0$. Zatem $\mu * \phi = -\Delta U(\mu * \phi)$. Można to pokazać inaczej: z gładkości splotu i Trzeciego Wzoru Greena dostajemy, że $(\mu * \phi)(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^d} U(\vec{x},\vec{y})\Delta(\mu * \phi)(\vec{y})d\vec{y} = -U(\Delta(\mu * \phi)(\vec{x}) = -\Delta U(\mu * \phi)(\vec{x})$.
Możemy więc powiedzieć, że możliwe jest odzyskanie gęstości rozkładu ładunku poprzez przyłożenie laplasjanu do potencjału, tzn. $\mu(d\vec{x}) = \nabla \cdot \vec{E}(\ \vec{x})d\vec{x} = -\Delta U_\mu(\vec{x})d\vec{x}$. Jeśli $\mu(D) = 0$, to także $\Delta U_\mu = 0$ w D, czyli U_μ jest harmoniczna w D.

Twierdzenie 1.8. Jeśli $\mu(dx) = \rho(x)dx$ i ρ jest klasy C^2 w otoczeniu x, to $-\Delta U_\mu(x) = \rho(x)$.
Ogólniej $\mu(dx) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\Delta(U_\mu * \phi_\varepsilon)(x)dx)$ ($*$-słaba granica miar), gdzie $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^d\phi(\varepsilon x)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ oraz $\phi \geqslant 0$ całkuje się do 1.

W szczególności U_μ jest harmoniczna na D, jeśli $|\mu|(D) = 0$.
Trzeci Wzór Greena dla $D = B(0,\varepsilon)$.

$$f(0) = -\int_D U(0,y)\Delta f(y)dy + \oint_{\partial D} \nabla f(z)c_d\varepsilon^{-d+2} \cdot dn_z + \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{|\partial D|}dz =$$

$$-\int_D (U(0,y) - c_d\varepsilon^{-d+2}\Delta f(y)dy + \frac{1}{|\partial D|}\oint_{\partial D} f(z)dz.$$

Oznacza to, że wartość funkcji we wnętrzu obszaru jest to jej laplasjan plus jej wartość na brzegu tego obszaru. Wynika stąd

Twierdzenie 1.9. Jeśli f jest harmoniczna w $D = B(x_0,r)$, to $f(x_0) = \frac{1}{|\partial D|}\oint_{\partial D} f(z)dz$. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne.

Wniosek 1.10 (Zasada maksimum)**.** Funkcje harmoniczne różne od stałej osiągają maksimum na brzegu.

Twierdzenie 1.11. Jeśli f jest harmoniczna w $D = B(x_0,r)$, to $f(x_0) = \frac{1}{|D|}\int_D f(y)dy$.

Wniosek 1.12 (Własność Liouville'a)**.** Funkcje harmoniczne nieujemne lub ograniczone w $\mathbb{R}^d$ są stałe.

Ogólniej: $f(x) = -\int_D U(x,y)\Delta f(y)dy + \oint_{\partial D}(U(x,z)\nabla f(z) - f(z)\nabla_z U(x,z)) \cdot dn_z$.
Przypuśćmy, że znamy funkcje $r_D:\ r_D(x,z) = U(x,z)$ dla $z \in \partial D$. $\Delta_y r_D(x,y) = 0 \rightsquigarrow$ zagadnienie Dirichleta.

$$f(x) = -\int_D (U(x,y) - r_D(x,y))\Delta f(y)dy - \oint_{\partial D} f(z)\nabla_y(U(x,z) - r_D(x,z)) \cdot dn_z. \tag{11}$$

Definicja 1.3. $G_D(x,y) = U(x,y) - r_D(x,y)$ nazywamy jądrem Greena.

Definicja 1.4. $P_D(x,z)dz = \nabla_y(U(x,z) - r_D(x,z)) \cdot n_z = -\nabla_y G_D(x,y) \cdot dn_z = -|\nabla_y G_D(x,z)|$ nazywamy jądrem Poissona.

1.1 Istnienie i własności funkcji Greena $G_D(x,y)$ i jądra Poissona $P_D(x,z)$

Jeśli $D = B(0,r),\ x \in D$, to $r_D(x,y) = U(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x)$ jest harmoniczne dla $y \neq \frac{r^2}{|x|^2}x$. Gdy $|z| = r$, to $|\frac{|x|}{r}z - \frac{r}{|x|}x|^2 = |x|^2 + |z|^2 - 2xz = |x-z|^2$, czyli $r_D(x,z) = U(x,z)$.

Funkcja Greena kuli $G_D(x,y) = U(x-y) - U(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x)$. Jądro Poissona: $P_d(x,z) = \frac{c_d}{r}\frac{r^2-x^2}{|x-y|^d}$.

Definicja 1.5 (Transformacja Kelvina)**.** to operator $Kf(x) = U(x)f(\frac{r^2}{|x|^2}x)$.

Fakt 1.13. $\Delta f = 0 \Rightarrow (Kf)(\frac{r^2}{|x|^2}x) = 0$.

2 Ruch Browna

2.1 Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja 2.1. Warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(Y|X)$ określić jako

$$\mathbb{E}(Y|X) = \phi(X) \tag{12}$$

dla jakiejś mierzalnej funkcji ϕ.

Inne przydatne wyrażenie:

$$\forall A\text{-mierzalnego } \mathbb{E}(Y;X \in A) = \mathbb{E}(\phi(X);X \in A). \tag{13}$$

Konwencja, którą będziemy stosować:

$$\mathbb{E}(Z;M) = \mathbb{E}(Z \cdot \mathbf{1}_M). \tag{14}$$

Ogólniej: niech $\mathcal{M}$ będzie σ-algebra. Wtedy $\mathbb{E}(Y|\mathcal{M}) = Z$, gdzie Z jest $\mathcal{M}$-mierzalna.

$$\mathbb{E}(Y;M) = \mathbb{E}(Z;M) \text{ dla } M \in \mathcal{M} \tag{15}$$

Rozkład warunkowy:

$$P(X \in B|X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(Y)|X) \tag{16}$$

$$P(X \in B|\mathcal{M}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(Y)|\mathcal{M}) \tag{17}$$

3 Ruch Browna

Definicja 3.1 (Ruch Browna w $\mathbb{R}^d$)**.** Proces stochastyczny X_t nazywamy ruchem Browna w $\mathbb{R}^d$ (inna nazwa: d-wymiarowy proces Wienera), jeśli, dla $t \in [0,\infty]$:

- $P(X_0 = 0) = 1$
- X_t ma stacjonarne przyrosty, tj. $X_{s+t} - X_s \overset{d}{=} X_t - X_0$
- X_t ma niezależne przyrosty, tj. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \Rightarrow X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne
- X_t ma rozkład niezmienniczy na obroty
- X_t ma z prawdopodobieństwem 1 ciągłe i niestałe trajektorie $t \mapsto X_t(\omega)$.

Twierdzenie 3.1. $X_t \sim \mathcal{N}(0, c \cdot t \cdot \mathbf{I}_d)$, $c > 0$.

3.1 Konstrukcja

Niech ξ_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\mathbf{I})$ w $\mathbb{R}^d$. Niech $t_0 = 0$, $(t_n : n \geqslant 1)$ - ciąg wszystkich liczb bez powtórzeń $\mathbb{Q} \cap (0,\infty)$. Definiujemy

$$\begin{cases} X_{t_0} = 0 \\ X_{t_n} = X_{t_i} + \sqrt{t_n - t_i}\xi_n, & \text{gdy } t_i = \max\{t_0, t_1, \dots t_{n-1}\} < t_n \\ X_{t_n} = \frac{t_j - t_n}{t_j - t_i} X_{t_i} + \frac{t_n - t_i}{t_j - t_i} X_{t_j} + \sqrt{\frac{(t_j - t_n)(t_n - t_i)}{t_j - t_i}}\xi_n, & \text{gdy } t_n \in (t_i, t_j) \text{ oraz } t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \notin (t_i, t_j) \end{cases} \tag{18}$$

Ćwiczenie 3.1. $X_t : t \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q})$ ma niezależne i stacjonarne przyrosty, $X_t \sim \mathcal{N}(0, 2t\mathbf{I})$.

Ćwiczenie 3.2. Z prawdopodobieństwem 1 trajektorie $t \mapsto X_t(\omega)$ rozszerzają się do funkcji ciągłych na $[0,\infty)$ (z zasady odbicia).

Ćwiczenie 3.3. $\widetilde{X}_t = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s$ jest procesem Wienera.

3.2 Przestrzeń Wienera

Definicja 3.2. $C([0,\infty))$ z miarą: rozkład $(t \mapsto X_t(\omega))$ nazywamy przestrzenią Wienera z miarą Wienera.

Rozważamy σ-ciała (uwaga na mierzalność)

1. borelowskie
2. σ-ciało zbiorów cylindrycznych (radonifikacja)

Zakładamy, że istnieje rodzina prawdopodoieństw $\mathbb{P}^x$, $x \in \mathbb{R}^d$ taka, że $(X_t - x : t \in [0,\infty))$ z miarą $\mathbb{P}^x$ jest równy (w sensie rozkładów skończenie wymiarowych) $(X_t : t \in [0,\infty))$ z miarą $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$.

Przykład 3.1. $\mathbb{P}^x$ nie istnieją na $\{\omega \in C([0,\infty)) : \omega(0) = 0\}$ z miarą Wienera i $X_t(\omega) = \omega(t)$.

Przykład 3.2. $\Omega = C([0,\infty))$, $\mathbb{P}^0$ - miara Wienera. $\mathbb{P}^x(\omega \in M) = \mathbb{P}^0(\omega - x \in M)$.

Definicja 3.3. Procesem kanonicznym nazywamy proces $X_t(\omega) = \omega(t)$. Oczywiście $(\omega - x)(t) = \omega(t) - x$.

4 Własność Markowa

Twierdzenie 4.1. Dla $d = 1$ zachodzi

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,T]} X_t > x) = 2\mathbb{P}(X_T > x),\ x > 0. \tag{19}$$

Dowód. (szkic) Niech $\tau_x = \inf\{t > 0 : X_t = x\} \in [0,\infty]$.

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,T]} X_t > x) = \mathbb{P}(\tau_x \leqslant T) \overset{!}{=} 2\mathbb{P}(\tau_x \leqslant T, X_T > X_{\tau_x}) \overset{X_{\tau_x} = x}{=} 2\mathbb{P}(X_t > x).$$

□

Definicja 4.1. $p_t(x,A) = \mathbb{P}^x(X_t \in A)$ będziemy nazywać prawdopodobieństwem (funkcją) przejścia.

Fakt 4.2. $p_t(x,\cdot) = \mathcal{N}(x, ct\mathbf{I})$. W ogólności $p_t(x,\cdot)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa, zaś $p_t(\cdot, A)$ jest funkcją borelowską. Zachodzi wzór $p_t(x,A) = p_t(0, A-x)$.

Ćwiczenie 4.1. Dla $0 < t_1 < t_2$ zachodzi

$$\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2) = \iint\limits_{A_1 \times A_2} f_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{20}$$

oraz

$$f_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = p_{t_1}(x, dx_1) p_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2). \tag{21}$$

Ogólniej, dla $0 < t_1 < \cdots < t_n$, rozkład skończenie wymiarowy wyraża się wzorem

$$\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} p_{t_1}(x, dx_1) \int_{A_2} p_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \ldots \int_{A_n} p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n). \quad (M) \tag{22}$$

Fakt 4.3. (M) zachodzi dla procesów o niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Definicja 4.2. Niech $0 < s_1 < \cdots < s_m < s$ oraz $0 < t_1 < \cdots < t_n$. Mówimy, że X_t ma własność Markowa, jeżeli

$$\mathbb{E}^x(X_{s+t_1} \in B_1, \ldots X_{s+t_n} \in B_n | (X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s)) = \phi(X_s), \tag{23}$$

gdzie $\phi(x) = \mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n)$.

Twierdzenie 4.4. $(M) \Rightarrow$ własność Markowa.

Dowód.

$$\mathbb{E}^x = (\phi(S_x); X_{s_1} \in A_1, \ldots X_{s_m} \in A_m, X_s \in A) =$$

$$= \int_{A_1} p_{s_1}(x, dy_1) \int_{A_2} p_{s_2 - s_1}(y_1, dy_2) \ldots \int_{A_m} p_{s_m - s_{m-1}}(y_{m-1}, dy_m) \int_A p_{s - s_m}(y_m, dy) \left(\int_{B_1} p_{t_1}(y, dx_1) \ldots \int_{B_n} p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \right) =$$

$$= \mathbb{P}^x(X_{s_1} \in A_1, \ldots X_{s_m} \in A_m, X_s \in A, X_{s+t_1} \in B_1, \ldots, X_{s+t_n} \in B_n).$$

□

Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\}$, $t \in [0,\infty]$, czyli $\mathcal{F}_t = \{X_s \in A, s \in [0,t], A \subseteq \mathbb{R}^d\}$ (naturalna filtracja). Własność Markowa oznacza, że $\mathbb{E}^x(\Phi(X_{s+t_1}, \ldots, X_{s+t_n}) | \mathcal{F}_t) = \phi(X_s)$, gdzie $\phi(x) = \mathbb{E}^x(\Phi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}))$, Φ - funkcja ograniczona borelowska.

5 Czasy Markowa

Definicja 5.1. Filtracja to rosnąca rodzina σ-algebr $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,\infty]$.

Definicja 5.2.

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s \in (t,\infty]} \mathcal{F}_s, \qquad \mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s \in [0,t)} \mathcal{F}_s \right). \tag{24}$$

Definicja 5.3. Zmienną losową $\tau \in [0,\infty]$ nazywamy $\mathcal{F}_t$-czasem Markowa (będziemy pisać w skrócie $\mathcal{F}_t-$cz.M.), jeśli $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

Ćwiczenie 5.1. Wtedy $\{\tau < t\}$ i $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Dowód. (Jacek Mucha)

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ t - \frac{1}{n} \geqslant 0}} \{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\},$$

przy czym $\{\tau \leqslant \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t$. Suma przeliczalnie wielu zbiorów mierzalnych jest mierzalna. Różnica dwóch zbiorów mierzalnych jest mierzalna, bo $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$. Dla $t = 0$ teza jest oczywista. Z kolei

$$\{\tau < t\} = (\{\tau \leqslant t\}^c \cup \{\tau = t\})^c \in \mathcal{F}_t.$$

□

Definicja 5.4. τ nazywamy czasem Markowa (cz. M.), jeśli τ jest $\mathcal{F}_{t+}$-czasem Markowa.

Ćwiczenie 5.2. $\mathcal{F}_{t+}$ też jest filtracją.

Fakt 5.1. Jeśli τ jest $\mathcal{F}_t$-czasem Markowa, to τ jest czasem Markowa.

Dowód. $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$. □

Fakt 5.2. τ-cz.M. $\iff \forall t\ \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że τ jest czasem Markowa. Wtedy

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ t - \frac{1}{n} \geqslant 0}} \{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t,$$

bo $\forall n \in \mathbb{N}\ \{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{(t-\frac{1}{n})+} \subseteq \mathcal{F}_t$.
W drugą stronę.

$$\{\tau \leqslant t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}.$$

Zauważmy, że

$$\forall k \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} = \bigcap_{\mathbb{N} \ni n \geqslant k} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}},$$

czyli $\{\tau \leqslant t\} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}} = \mathcal{F}_{t+}$. □

Fakt 5.3. Niech τ, σ - czasy Markowa. Wtedy $\min(\tau, \sigma)$ też jest czasem Markowa.

Dowód. $\{\min(\tau, \sigma) < t\} = \{\tau < t\} \cup \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_{t+}$. □

Fakt 5.4. Niech τ, σ - $\mathcal{F}_t$-czasy Markowa. Wtedy $\min(\tau, \sigma)$ też jest $\mathcal{F}_t$-czasem Markowa.

Dowód. $\{\min(\tau, \sigma) < t\} = \{\tau < t\} \cup \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t$. □

Ćwiczenie 5.3. Niech $\tau, \sigma, (\tau_n\}$ - czasy Markowa. Wtedy czasami Markowa są także

- $\max(\tau, \sigma)$
- $\sup \tau_n$
- $\inf \tau_n$

- $\limsup \tau_n$
- $\liminf \tau_n$.

Przykład 5.1. Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\}$ oraz $\tau_A = \inf\{t : X_t \notin A\}$ (czas pierwszego wyjścia ze zbioru A).
Jeśli $A = \overline{A}$ (A jest zbiorem domkniętym), to $\tau_A = \inf\{t \in \mathbb{Q} : X_t \notin A\}$. Wtedy $\{\tau_A < t\} = \bigcup_{\substack{s\in\mathbb{Q}\\ s<t}}\{X_s \notin A\} \in \mathcal{F}_t$, bo jest to suma przeliczalnie wielu zdarzeń z $\mathcal{F}_t$. Zatem τ_A jest czasem Markowa (ale nie jest $\mathcal{F}_t$-czasem Markowa!).

Jeśli A jest zbiorem otwartym, to $\tau_A \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\tau_{A_n}$, gdzie $A_n = \{x : dist(x, A^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$. Równość (1) wynika z ciągłości trajektorii: $X_{\tau_{A_n}} \notin Int(A_k)$, gdy $n \geqslant k$, zatem, gdy $X_\tau = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_{A_n}}$ (gdzie $\tau = \lim_{n\to\infty}\tau_{A_n}$); $\bigcup_k A_k = A$, czyli $X_\tau \notin A$, o ile $\tau < \infty$. Zatem $\tau_{A_n} \leqslant \tau_A \leqslant \tau$, o ile $\tau < \infty$. Gdy $\tau = \infty$, to $\tau_A \geqslant \tau_{A_n}$, zatem $\tau_A = \infty$. W szczególności τ_A są mierzalne i są czasami Markowa. Tak naprawdę τ_A są nawet $\mathcal{F}_t$-czasami Markowa.

Fakt 5.5. Jeśli przestrzeń probabilistyczna jest odpowiednio zupełna, to τ_A jest czasem Markowa dla dowolnego borelowskiego A.

Dowód. Trudny. □

Definicja 5.5. Jeśli τ-cz.M., definiujemy $\mathcal{F}_{\tau+} = \{M \in \mathcal{F}_\infty : M \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_{t+}\}$.

Ćwiczenie 5.4. $\mathcal{F}_{\tau+} = \{M \in \mathcal{F}_\infty : M \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

Definicja 5.6. Jeśli τ-cz.M., to definiujemy $\mathcal{F}_\tau = \{M \in \mathcal{F}_\infty : M \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

Definicja 5.7. Jeśli τ-cz.M., to definiujemy $\mathcal{F}_{\tau-} = \sigma\{M \cap \{\tau < t\} : M \in \mathcal{F}_t\}$.

Ćwiczenie 5.5. $\tau \equiv t \;\Rightarrow\; \mathcal{F}_{\tau(\pm)} = \mathcal{F}_{t(\pm)}$.

Ćwiczenie 5.6. $\mathcal{F}_\tau, \mathcal{F}_{\tau+}, \mathcal{F}_{\tau-}$ to σ-algebry.

Ćwiczenie 5.7. $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau+}$.

Fakt 5.6. Jeśli $\tau \leqslant \sigma$ - czasy Markowa, to $\mathcal{F}_{\tau+} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma+}$.

Dowód. $M \cap \{\sigma < t\} = M \cap \{\tau < t\} \cap \{\sigma < t\}$, przy czym $\{\sigma < t\} \subseteq \{\tau < t\}$. Ale $M \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, bo $M \in \mathcal{F}_{\tau+}$. $\{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t$, bo σ-cz.M. Przekrój dwóch zdarzeń z $\mathcal{F}_t$ jest w $\mathcal{F}_t$, więc $M \cap \{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_t$. □

Fakt 5.7. Jeśli τ-cz.M., to τ jest $\mathcal{F}_{\tau+}$-mierzalny oraz $\mathcal{F}_{\tau-}$-mierzalny.

Dowód. Będziemy myśleć, że $M = \{\tau < t\}$.

$$\{\tau < t\} \cap \{\tau < s\} = \{tau < \min(t,s)\} \in \mathcal{F}_{\min(t,s)} \subseteq \mathcal{F}_s.$$

Czyli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_{\tau+}$. W istocie τ jest $\mathcal{F}_{\tau-}$-mierzalny. □

Fakt 5.8. Jeśli τ, σ-cz.M., to $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau+} \cap \mathcal{F}_{\sigma+}$.

Dowód.

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\sigma < t\} = \bigcup_{\substack{s<t\\ s\in\mathbb{Q}}} \{\tau < s\} \cap \{s < \sigma\} \cap \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

bo $\{\tau < s\} \in \mathcal{F}_s,\ \{s < \sigma\} \in \mathcal{F}_{s+},\ \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t$. Zatem $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma+}$. Z drugiej strony

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau < t\} = \left(\bigcup_{\substack{s<t \\ s\in\mathbb{Q}}} \{\tau < s\} \cap \{s < \sigma\} \cap \{\tau < t\} \right) \cup (\{\tau < t\} \cap \{\sigma \geqslant t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

bo $\tau < s\} \in \mathcal{F}_s, \{s < \sigma\} \in \mathcal{F}_{s+}, \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \{\sigma \geqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Zatem $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau+}$. □

Fakt 5.9. Jeśli cz.M. $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, gdzie τ_n - malejący ciąg czasów Markowa, to

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\tau_n+}. \tag{25}$$

Dowód. Pokażemy ($\subseteq$).

$$M \cap \{\tau_n < t\} = M \cap \{\tau < t\} \cap \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

bo $M \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ z założenia oraz $\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$.
($\supseteq$) W drugą stronę.

$$M \cap \{\tau < t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

□

Fakt 5.10. Jeśli τ jest czasem Markowa, a σ - $\mathcal{F}_t$-czasem Markowa oraz $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_{\tau+} \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

Dowód.

$$M \cap \{\sigma \leqslant \tau\} = M \cap \{tau < t\} \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

6 Mocna własność Markowa

Definicja 6.1. Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\}$. Proces stochastyczny X_t ma mocną własność Markowa, jeśli

$$\mathbb{E}^x(\Phi(X_{\tau+t_1}, \ldots, X_{\tau+t_n}) | \mathcal{F}_{\tau+}) = \phi(X_\tau), \tag{26}$$

gdzie $\phi(y) = \mathbb{E}^y \Phi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ na zbiorze $\{\tau < \infty\}$ dla każdego czasu Markowa τ, funkcji borelowskiej i ograniczonej Φ i $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.
Definicję powyższą można również sformułować następująco:

$$\mathbb{E}^x(\Phi(X_{\tau+t_1}, \ldots, X_{\tau+t_n}); M \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbb{E}^x(\phi(X_\tau); M \cap \{\tau < \infty\}),\ M \in \mathcal{F}_{\tau+}. \tag{27}$$

$$\mathbb{P}^x(M) = \mathbb{P}^x(M \cap M) = \mathbb{E}^x(\mathbf{1}_M; M) = \mathbb{E}^x(\phi(X_0); M) = \mathbb{E}^x(\phi(x); M) = \phi(x)\mathbb{P}^x(M) = (\mathbb{P}^x(M))^2,$$

bo $\Phi = \mathbf{1}_M$ można aproksymować przez Φ_n takie jak w mocnej własności Markowa; $M \subseteq \mathcal{F}_{0+}, \tau = 0, \phi(y) = \mathbb{E}^y(\mathbf{1}_M) = \mathbb{P}^y(M)$.

Wniosek 6.1. (Prawo 0-1 Blumenthala). Jeśli proces stochastyczny X_t ma mocną własność Markowa, to $\mathcal{F}_{0+}$ jest trywialne, tzn. $\mathbb{P}^x(M) \in \{0,1\}$ dla $M \in \mathcal{F}_{0+}$.

Twierdzenie 6.2. Ruch Browna ma mocną własność Markowa.

6.1 Procesy Fellera

Twierdzenie 6.3. Procesy Fellera mają mocną własność Markowa.

Dowód podamy później.

Definicja 6.2. $p_t(x,dy)$ nazywamy fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia, jeśli

1. $p_0(x,dy) = \delta_x(dy)$
2. $f \in \mathcal{C}_0(X) \Rightarrow \int_X f(y)p_t(x,dy) \in \mathcal{C}_0$ jako funkcja x
3. $p_t(x,\cdot)$ jest ciągłą funkcją t w słabej topologii na przestrzeni miarowej.

Fakt 6.4. Przy założeniu (1) i (2) z powyższej definicji, (3) można zapisać równoważnie jako:
3. $(t,x) \mapsto \int f(y)p_t(x,dy)$ jest ciągła względem (t,x).

Przez $p_t f(x)$ będziemy rozumieć

$$p_t f(x) = \int f(y)p_t(x,dy). \tag{28}$$

Przy powyższym oznaczeniu można napisać, że warunki (1),(2),(3) z Definicji 6.2 odpowiadają

1. $p_0 f = f$
2. $p_t : \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(X)$
3. $p_s f \longrightarrow p_t f$, gdy $s \to t$, a $f \in \mathcal{C}_0(X)$.

Tutaj X jest lokalnie zwartą ośrodkową przestrzenią metryczną, zaś $\mathcal{C}_0(X)$ to przestrzeń funkcji ciągłych takich, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists K$-zwarty taki, że $|f(x)| < \varepsilon$ dla $x \notin K$.
Dowód podamy później.

Definicja 6.3. Proces X_t nazywamy procesem Fellera, jeśli spełnia (M), ma fellerowskie prawdopodobieństwa przejścia i jego trajektorie są prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami (càdlàg).

Twierdzenie 6.5. Każde fellerowskie prawdopodobieństwo przejścia odpowiada pewnemu procesowi Fellera.

Wracamy do dowodu Twierdzenia 6.3, tj., że każdy proces Fellera ma mocną własność Markowa.

Dowód. Dowód będzie przebiegał w pięciu krokach.

Krok 1. τ jest czasem Markowa. $\tau = \lim_{n\to\infty} \min(\tau,n)$, oczywiście $\min(\tau,n)$ to czasy Markowa. Jeśli τ jest ograniczony, to $\tau = \lim_{k\to\infty} \tau_k$, gdzie $\tau_k = \frac{\lfloor 2^k\tau+1\rfloor}{2^k}$ przyjmuje skończenie wiele wartości.

$$\{\tau_k \leqslant t\} = \{\lfloor 2^k\tau+1\rfloor \leqslant 2^k t\} = \{2^k\tau+1 < \lfloor 2^k t\rfloor + 1\} = \{\tau < \frac{\lfloor 2^k t\rfloor}{2^k}\} \in \mathcal{F}_{\frac{\lfloor 2^k t\rfloor}{2^k}} \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Zatem τ_k jest $\mathcal{F}_t$-czasem Markowa.

Krok 2. Policzymy $L = \mathbb{E}^x(\Phi(X_{\tau_k+t_1},\dots,X_{\tau_k+t_n});M\cap\{\tau_k=s\})$. Skorzystamy z Faktu 5.10, co daje $M\cap\{\tau_k=s\}\in\mathcal{F}_{\tau+}\subseteq\mathcal{F}_{\tau_k}$, zaś $\{\tau_k=s\}\in\mathcal{F}_s$. Dalej

$$L = \mathbb{E}^x(\Phi(X_{s+t_1},\dots,X_{s+t_n});M\cap\{\tau_k=s\}) \stackrel{1}{=} \mathbb{E}^x(\phi(X_s);M\cap\{\tau_k=s\}) = \mathbb{E}^x(\phi(X_{\tau_k});M\cap\{\tau_k=s\}),$$

gdzie równość 1 wynika z własności Markowa. Następnie sumujemy po wszystkich wartościach s (jest ich skończenie wiele), otrzymując:

$$\mathbb{E}^x(\Phi(X_{\tau_k+t_1},\dots,X_{\tau_k+t_n};M) = \mathbb{E}^x(\phi(X_{\tau_k});M). \tag{29}$$

Krok 3. Przejście $k\to\infty$. $X_{\tau_k+t_j}\to X_{\tau+t_j}$ p.w. Jeśli $\Phi\in\mathcal{C}_0(\mathbf{X}^n)$, to lewa strona równania 29 dąży do $\mathbb{E}^x(\Phi(X_{\tau+t_1},\dots,X_{\tau+t_n});M)$.
$X_{\tau_k}\to X_\tau$ p.w. ϕ jest ciągła (ćwiczenie, $f\in\mathcal{C}_0(\mathbf{X})\to\mathbb{E}^x f(X_t)\in\mathcal{C}_0$,
$\mathbb{E}^x\Phi(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) = \int p_{t_1}(x,dx_1)\dots\int\Phi(x_1,\dots,x_n)p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_x)...)$. Zatem prawa strona dąży do $\mathbb{E}^x(\phi(X_\tau);M)$.

Krok 4. τ - niekoniecznie ograniczony. Niech $\sigma_k=\min(\tau,k)$. $\tau=\lim_{k\to\infty}\sigma_k$. Dla $M\in\mathcal{F}_{\sigma_k+}$ zachodzi

$$\mathbb{E}^x(\Phi(X_{\sigma_k+t_1},\dots,X_{\sigma_k+t_n});M\cap\{\sigma_k=\tau\}) = \mathbb{E}^x(\phi(X_{\sigma_k});M\cap\{\sigma_k=\tau\}).$$

Tutaj $M\cap\{\sigma_k=\tau\}\in\mathcal{F}_{\sigma_k+}$ i rośnie do $M\cap\{\tau<\infty\}$. Z twierdzenia Lebesgue'a (dla odpowiednich M) zachodzi więc równość

$$\mathbb{E}^x(\Phi(X_{\tau+t_1},\dots,X_{\tau+t_n});M\cap\{\tau<\infty\}) = \mathbb{E}^x(\phi(X_\tau);M\cap\{\tau<\infty\}).$$

Jeśli $M\in\mathcal{F}_{\tau+}$, to $M\cap\{\tau<\infty\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}M\cap\{\tau\leqslant k\}$ oraz $M\cap\{\tau\leqslant k\}\in\mathcal{F}_{\sigma_k+}$, bo $M\cap\{\tau\leqslant k\}\cap\{\sigma_k<t\}=M\cap\{\tau=\sigma_k\}\cap\{\tau<t\}=M\cap\{\tau<t\}\cap\{\tau<k\}$. Jeśli $t\leqslant k$, to ostatnie wyrażenie $M\cap\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t$, w przeciwnym zaś przypadku $M\cap\{\tau\leqslant k\}\in\mathcal{F}_{k+}\subseteq\mathcal{F}_t$.

Krok 5. Pokażemy na koniec, że $\phi(X_{=}tau)$ jest $\mathcal{F}_{\tau+}$-mierzalny.
Jeśli τ jest ograniczony, to X_{τ_k} są $\mathcal{F}_{\tau_k}$-mierzalne, bo $\{X_{\tau_k}\in A\}=\bigcup_s\{X_s\in A\}\cap\{\tau_k=s\}$, gdzie każdy składnik sumy należy do rodziny $\mathcal{F}_{\tau_k}$ (ćwiczenie). Dalej, $X_\tau=\lim_{k\to\infty}X_{\tau_k}$ jest $\mathcal{F}_{\tau_j}$-mierzalne $\forall j\in\mathbb{N}$. X_τ jest mierzalne dla $\bigcap_{j=1}^\infty\mathcal{F}_{\tau_j}=\mathcal{F}_{\tau+}$.
Jeśli τ-dowolny, to

$$\{X_\tau\in A,\tau<\infty\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{X_\tau\in A,\tau=\sigma_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{X_{\sigma_k}\in A;\tau=\sigma_k\}\in\mathcal{F}_{\tau+},$$

bo i-ty składnik sumy należy do rodziny $\mathcal{F}_{\sigma_k+}$. □