Łańcuchy Markowa
Lista zadań nr 5

(1) Przypuśćmy, że Resovia, gdy gra z Zaksą (w siatkówkę), zdobywa punkt z prawdopodbieństwem 46% gdy serwuje oraz 56% gdy przyjmuje. Niech $X_n = 1$ gdy Resovia serwuje w n-tej piłce, $X_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Uzasadnij, że X_n jest łańcuchem Markowa i zapisz jego macierz przejścia.

(2) Co jest bardziej prawdopodobne: (a) Resovia będzie serwować w czwartej piłce jeśli serwowała w pierwszej, czy (b) Resovia będzie serwować w czwartej piłce, jeśli przyjmowała w pierwszej?

(3) Wyznacz w przybliżeniu prawdopodbieństwo, że Resovia serwuje w 25 piłce. Czy ma (istotne) znaczenie to, kto serwował w pierwszej?

(4) Zadanie dodatkowe, zupełnie nie o łańcuchach Markowa: napisz program komputerowy, który obliczy prawdopodbieństwo tego, że Resovia wygra set. (Wyniki: ok. 55% gdy serwuje pierwszą piłkę, ok. 56,2% w przeciwnym razie.)

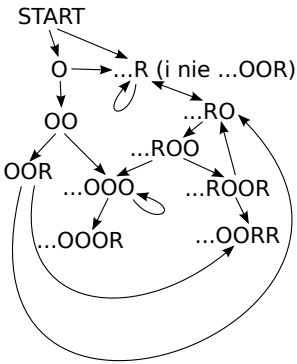
(5) Inne zadanie dodatkowe: poeksperymentuj z markowskimi generatorami tekstu (ang. *Markov text generator*).

(6) Pijak próbuje wrócić do domu. Znajduje się na ścieżce długości 5 kroków, która łączy jego dom z posterunkiem policji. Pijak zatacza się, wykonując krok w przód (w stronę domu) lub w tył (w stronę komisariatu) z prawdopodbieństwami odpowiednio $\frac{2}{3}$ oraz $\frac{1}{3}$. Gdy pijak trafi do domu lub na posterunek, zostaje tam na dłużej. Odległość pijaka od domu po n-tym kroku oznaczmy przez X_n. Uzasadnij, że X_n jest łańcuchem Markowa, zapisz jego macierz przejścia P i znajdź rozkłady stacjonarne.

(7) Niech q_k oznacza prawdopodobieństwo dojścia do domu (przed trafieniem na komisariat), gdy początkowa odległość od domu wynosiła k. Uzasadnij, że wektor kolumnowy $\vec{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]$ spełnia równanie $\vec{q} = P\vec{q}$ oraz $q_0 = 1$, $q_5 = 0$.

(8) Wyznacz wartości q_k. Wskazówka: wektor $\vec{q}' = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ spełnia równanie $\vec{q}' = P'\vec{q}' + [\frac{2}{3}, 0, 0, 0]$, gdzie P' to macierz P z usuniętymi: pierwszym i ostatnim wierszem oraz pierwszą i ostatnią kolumną.

(9) Ania i Bartek grają w grę omówioną na wykładzie: wpierw wybierają ciągi czterech możliwych wyników (np. ORRR), a potem rzucają monetą, aż wypadnie któryś z wybranych przez nich ciągów. Wygrawa ta osoba, która wybrała ów ciąg. Ania wybrała ciąg OORR, a Bartek — OOOR. Uzasadnij, że tę grę można opisać diagramem po prawej. Wyznacz (za pomocą komputera) prawdopodobieństwo wygranej Bartka.



(10) A co by było, gdyby Bartek wybrał ciąg ORRR?