**Lista zadań nr 4: całka Riemanna–Stieltjesa**

(1) Oblicz całkę $\int_{-3}^{3} f(x)dg(x)$ jeśli

$$f(x) = \lfloor x \rfloor, \qquad g(x) = \lfloor x + \tfrac{1}{2} \rfloor.$$

(2) Oblicz całkę $\int_{-3}^{3} f(x)dg(x)$ jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{gdy } x < -1, \\ x & \text{gdy } x \geqslant -1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{gdy } x < 0, \\ e^x & \text{gdy } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(3) Rzucamy standardową kostką sześcienną. Niech $F(x)$ oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia mniej niż $x$ oczek. Zapisz wzór na $F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i oblicz

$$\int_0^{10} x dF(x) \qquad \text{oraz} \qquad \int_0^{10} x^2 dF(x).$$

(4) Losujemy liczbę z przedziału $[1, 5]$ w taki sposób, że prawdopodobieństwo wylosowania liczby z przedziału $[a, b] \subseteq [1, 5]$ jest proporcjonalne do jego długości $b - a$. Niech $F(x)$ oznacza prawdopodobieństwo wylosowalnia liczby mniejszej niż $x$. Zapisz wzór na $F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i oblicz

$$\int_0^{10} x dF(x) \qquad \text{oraz} \qquad \int_0^{10} x^2 dF(x).$$

(5) Losujemy liczbę z przedziału $[1, 5]$ tak, jak wyżej, ale jeśli wypadnie więcej niż 3, to zaokrąglamy wynik do najbliższej liczby całkowitej. Niech $F(x)$ oznacza prawdopodobieństwo wylosowalnia liczby mniejszej niż $x$. Zapisz wzór na $F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i raz jeszcze oblicz

$$\int_0^{10} x dF(x) \qquad \text{oraz} \qquad \int_0^{10} x^2 dF(x).$$

(6) Udowodnij *tożsamość Abela* (nazywaną też *wzorem na sumowanie przez części*):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i-1}) = a_n b_n - a_1 b_0 - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) b_i.$$

(7) Wykorzystaj tożsamość Abela do dowodu wzoru na całkowanie przez części:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x).$$

(8) Przypuśćmy, że $f$ jest całkowalna na $[a, b]$ w sensie Riemanna, zaś $g$ ma ciągłą pochodną na $[a, b]$. Uzasadnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2 < x_1 + \delta$ oraz $\tilde{x}$ jest zawarty między $x_1$ i $x_2$, to

$$\left| f(\tilde{x})(g(x_2) - g(x_1) - f(\tilde{x})g(\tilde{x})(x_2 - x_1) \right| < \varepsilon(x_2 - x_1).$$

Wywnioskuj, że jeśli $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jest podziałem przedziału $[a, b]$ (z punktami pośrednimi) o średnicy mniejszej niż $\delta$, to

$$\left| S(f, g, \mathcal{P}) - S(fg', \mathcal{P}) \right| < (b - a)\varepsilon.$$

Stąd z kolei wywnioskuj wzór

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$