Analiza matematyczna I r matem. WPPT
Lista zadań nr 0. Powtórka szkoły średniej

1. Znaleźć kresy dolne i górne niżej podanych zbiorów i wyznaczyć – jeśli istnieją – najmniejsze i największe elementy w tych zbiorach:

$$A = \{x \in R : x = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+m},\ n,m \in N\},\ N = \{1,2,3,\dots\};$$

$$B = \{x \in R : x = \frac{uv}{u^2+v^2},\ u,v \in R,\ u^2+v^2 \neq 0\};$$

$$C = \{x \in R : x = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},\ a,b,c \in R,\ a,b,c > 0\};$$

$$D = \{x \in R : x = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a},\ a,b,c \in R,\ a,b,c > 0\}.$$

2. Dane są dwa niepuste i ograniczone z góry zbiory $A, B \subset R$. Niech $C = A \cup B$ i $D = \{z : z = x+y,\ x \in A,\ y \in B\}$. Ustalić związki pomiędzy $\sup A$, $\sup B$, $\sup C$ i $\sup D$.

3. Zbiory $A, B \subset R$ są niepuste i ograniczone z góry i ponadto

$$\bigwedge_{x \in A} \bigvee_{y \in B} x < y \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{y \in B} \bigvee_{x \in A} y < x.$$

Ustalić związek pomiędzy $\sup A$ i $\sup B$. Czy zbiory te mają elementy największe?

4. Indukcja i zasada minimum w. N. Wykazać, że

(α) liczba $6^n - (-1)^n$ dzieli się przez 7 dla $n \in N$,

(β) $\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}$, $a_i \geq 0$, $n \in N$,

(γ) $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$, $n \in N$,

(δ) W zbiorze n płaszczyzn przechodzących przez wspólny punkt P żadne trzy nie przecinają się wzdłuż wspólnej prostej. Na ile części płaszczyzny te dzielą przestrzeń?

(ε) Wyprowadzić zasadę indukcji z zasady minimum.

5. Wykorzystując zasadę indukcji udowodnić, że jeśli liczby nieujemne $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają warunek $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, to $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq 1$. Wyjaśnić też w jakich przypadkach zachodzi równość.
Wynik ten wykorzystać do dowodu znanej nierówności dla średnich

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,n.$$

5' $a_1 a_2 \cdots a_n = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$

6. Udowodnić nierówność: $||x|-|y|| \leq |x-y|$, $x, y \in R$.

7. Uzasadnić równość: $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$, gdzie $\max\{a,b\}$ oznacza większą z dwóch liczb a i b.

8. Udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną, to $[(1+\sqrt{3})^{2n}]$ jest liczbą nieparzystą. $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x.

9. Naszkicować wykresy funkcji: $y = |\sin x| - \sin|x|$; $y = \operatorname{sgn}(1-|x|)$; $y = 2 - \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; $y = x - [2x]$.

10. Rozwiązać nierówności: $\sin 2x < 2\sin x$; $\cos 2\pi x > 18x^2$.

11. $f(x) = x$ dla $x \in \langle 0, 1)$ i $f(x) = 1 + 2f(x-1)$ dla $x \geq 1$. Naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$ na półprostej $x \geq 0$.

12. Wiadomo, że $f(x^3) = \frac{1}{1+x^2}$. Znaleźć $f(x)$.

13. Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych obliczyć pole obszaru ograniczonego z dołu osią Ox, a z góry wykresem funkcji $y = \sin^2 x$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

14. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = x^{\log(\log x)} - (\log x)^{\log x}$ i naszkicować wykres tej funkcji.

15. Naszkicować wykresy funkcji odwrotnych do funkcji: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ w odpowiednich przedziałach i wykazać, że $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in R$.

16. Naszkicować wykresy funkcji: $y = \sin(\arcsin x)$, $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \cos(\arcsin x)$, $y = \cos(2\arccos x)$, w naturalnych dziedzinach określoności tych funkcji.

17. Podać przykład funkcji $f: R \to R$, dla której równanie $f(x) = b$ ma dla każdego $b \in R$ dokładnie 3 rozwiązania.

18. Niech $f: \mathcal{D} \to R$ i niech $A \subset \mathcal{D}$. Przyjmujemy oznaczenia: $\sup_A f(x) = \sup f(A)$ i $\inf_A f(x) = \inf f(A)$. Udowodnić, że jeśli $A, B \subset \mathcal{D}$ i $A \subset B$, to $\sup_B f(x) \geq \sup_A f(x)$ i $\inf_B f(x) \leq \inf_A f(x)$. Pokazać też, że jeśli $f, g: \mathcal{D} \to R$, to

$$\sup_{\mathcal{D}}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{\mathcal{D}} f(x) + \sup_{\mathcal{D}} g(x); \quad \sup_{\mathcal{D}}(f(x)-g(x)) \geq \sup_{\mathcal{D}} f(x) - \sup_{\mathcal{D}} g(x);$$

$$\left|\sup_{\mathcal{D}} f(x) - \sup_{\mathcal{D}} g(x)\right| \leq \sup_{\mathcal{D}} |f(x) - g(x)|.$$

Lista zadań nr 1.

1. Pokazać, że zbiór $A = \{x : x = \frac{n-m}{n+m},\ n,m \in N\}$ jest gęsty w odcinku $\langle -1, 1\rangle$.

2. Pokazać, że zbiór $B = \{x : x = w\sqrt{3},\ w \in Q\}$ jest gęsty w R.

3. Czy zbiór $C = \{x : x = \sqrt{n} - \sqrt{m},\ n,m \in N\}$ jest gęsty w R?

4. W R dane są ciągi: a) $1,0,1,0,1,\ldots$; b) $0,0,1,0,0,1,\ldots$; c) $0,1,-1,0,1,-1,\ldots$; d) $1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,\ldots$; Jak wyrazić n-ty wyraz każdego z tych ciągów poprzez funkcję indeksu n?

5. Ciągi x_n i y_n są zbieżne. Kiedy ciąg z_n o wyrazach $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ jest zbieżny? ($z_{2k-1} = x_k$, $z_{2k} = y_k$).

6. Podciągi x_{2n}, x_{3n} i x_{3n+2} ciągu x_n są zbieżne. Czy ciąg x_n musi być zbieżny? Jaka byłaby odpowiedź, gdyby zbieżne były podciągi: x_{2n}, x_{3n+1}, x_{3n+2} i x_{6n+3}.

7. Dany jest ciąg x_n. Wiadomo, że wszystkie podciągi ciągu x_n postaci $y^k_n = x_{kn}$ są zbieżne, $k = 2,3,\ldots$; $n = 1,2,3,\ldots$ (k jest numerem podciągu, a n jest numerem wyrazu tego podciągu). Są to np. podciągi: $x_2, x_4, x_6, \ldots$; $x_3, x_6, x_9, \ldots$; $x_4, x_8, x_{12}, \ldots$ itd. Czy ciąg x_n musi być zbieżny?

8. $a_n, b_n \in R$ i $\lim a_n b_n = 0$. Czy jeden z tych ciągów musi mieć granicę równą 0? Czy ciągi a_n i b_n muszą być ograniczone? Czy musi być $\lim a_n = 0$ jeżeli wiadomo, że ciąg b_n jest ograniczony?

9. Niech $a_n \in R$. Pokazać, że: $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0 \iff \lim a_n^2 = 0$.

10. $a_n \in R$, $\lim a_n^2 = 1$ i $\lim (a_{n+1} - a_n) = 0$. Czy ciąg a_n musi być zbieżny?

11. $a_n, b_n \in R$ i $\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n^2 - b_n^2) = 0$. Czy ciągi a_n i b_n muszą być zbieżne?

12. Ciąg $a_n \in R$ jest monotoniczny i zawiera podciąg zbieżny do g. Pokazać, że $\lim a_n = g$.

13. $A \subset R$, $g = \sup A$ i $g \notin A$. Pokazać, że istnieje ciąg $x_n \in A$ spełniający warunek $x_{n+1} > x_n$ i taki, że $\lim x_n = g$.

14. Wykorzystując tw. o ciągach monotonicznych, sprawdzić zbieżność niżej podanych ciągów:

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad ; \quad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \; ;$$

$$c_1 = q, \; 0 \le q \le \frac{1}{3} \text{ i } c_{n+1} = \frac{1}{4 - 3c_n} \; ;$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \text{ i } y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + y_n^2\right).$$

15. Ciąg a_n spełnia równanie (*) $a_n + a_{n+1} - 2a_{n+2} = 0$ oraz warunki początkowe: $a_0 = p$ i $a_1 = q$, gdzie $p, q \in R$. Wyznaczyć a_n za pomocą funkcji indeksu n i zbadać zbieżność tego ciągu.

<u>Wskazówka</u>. Pokazać, że jeśli ciągi x_n i y_n spełniają równanie (*), to przy dowolnych rzeczywistych α i β, ciąg $z_n = \alpha x_n + \beta y_n$ również spełnia to równanie; a następnie znaleźć dwa rozwiązania równania (*) w postaci szczególnej $a_n = r^n$, gdzie r jest liczbą rzeczywistą.

16. Ciąg a_n spełnia równanie $a_{n+2} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ oraz warunki $a_0 = 2$, $a_1 = \sqrt{2}$. Znaleźć a_n i zbadać zbieżność tego ciągu.

17. Ciąg a_n o wyrazach dodatnich spełnia warunek: $\lim a_n(a_n - 1) = 2$. Udowodnić, że a_n jest ciągiem zbieżnym i znaleźć jego granicę.

18. Sprawdzić czy ciągi

$$a_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \; ; \; b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n^2}$$

spełniają warunek Cauchy'ego zbieżności w R.

19.* Ciąg $a_n \in R$ spełnia warunek: $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \le 1$ dla $n = 1, 2, \dots$. Pokazać, że a_n jest ciągiem zbieżnym. Czy prawdziwe jest twierdzenie: Jeżeli ciąg a_n jest zbieżny, to

$$\bigvee_{C>0} \; \bigwedge_{n \in N} \; |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \le C \; ?$$

Analiza matematyczna I r. matem. NPPT
Lista zadań nr 2.

1. Ciąg $a_n \in R$ spełnia warunek $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$, $n \in N$. Pokazać, że a_n jest ciągiem zbieżnym.

2. Ciąg $a_n \in R$ spełnia warunek $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n+1}$, $n \in N$. Czy ciąg ten musi być zbieżny?

3. Znaleźć granice podanych ciągów, korzystając z tw. o trzech ciągach:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}; \quad b_n = \sqrt[n]{1+n^2+3^n};$$

$$c_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}; \quad d_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n - 2^n}; \quad e_n = \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n}};$$

$$f_n = \sqrt[n^2]{1+2^n}; \quad g_n = \sqrt[2^n]{1+n^2}; \quad h_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n; \quad p_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n;$$

4* Zbadać zbieżność ciągu $q_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

5. $a_n \in R$, $a_n > 0$, $\lim a_n = g$, $g > 0$. Pokazać, że $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. Co można powiedzieć o granicy ciągu $\sqrt[n]{a_n}$, jeśli wiadomo, że $a_n > 0$ i $\lim a_n = 0$?

6. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim \sqrt[n]{a_n} = g$, $g < 1$, to $\lim a_n = 0$. Korzystając z tego faktu wyznaczyć granice ciągów:

a) $\frac{n^\alpha}{b^n}$, $\alpha \in R$, $b > 1$ oraz b) $\left(\sqrt[n]{1+2^{n^2}}\right)^{-1}$.

7. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, $g < 1$, to $\lim a_n = 0$. Wykorzystać ten fakt do wyznaczenia granic:

$$\lim \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad \lim \frac{a^n}{n!}, \quad a > 1.$$

8. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to istnieje granica $\lim \sqrt[n]{a_n}$ i jest także równa g. Wykorzystać ten fakt w przykładach:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}; \quad \lim \left(\sqrt[n]{n!}\right)^{-1}.$$

Czy prawdziwe jest twierdzenie: „$a_n > 0$ i istnieje granica $\lim \sqrt[n]{a_n}$, to istnieje granica $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$"?

9. Udowodnić twierdzenie Stolza. Jeżeli $b_{n+1} > b_n$, $\lim b_n = \infty$ i $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$, to istnieje granica $\lim \frac{a_n}{b_n}$ i jest równa g.

Wykorzystać to twierdzenie w przykładach:

$\lim \frac{\ln n}{n}$; $\lim \frac{n^5}{1^4+2^4+\dots+n^4}$; $\lim \frac{\ln n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$;

$\lim \frac{\ln n!}{n \ln n}$;

$\lim \frac{\frac{2}{1}+\frac{9}{4}+\frac{64}{27}+\dots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

10. Wykazać, że ciąg $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący i ma granicę e. (Oszacować stosunek b_n/b_{n-1} dla $n \geq 2$)

Pokazać też, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

11. Wykazać nierówność

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \in N.$$

12. Obliczyć granicę $\lim \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)$.

13. Zbadać zbieżność podanych ciągów i w przypadku zbieżności obliczyć ich granice:

$\frac{n(n-\sin n)}{1+n^2}$; $\frac{2^n+(-3)^n}{2^n+3^n}$; $\frac{n+\sqrt[n]{1+n^n}}{n+\sqrt{n}}$; $\sin n$; $\cos^n \frac{2\pi n}{3}$;

$\sqrt{2^{2n+1}-2^n} - 2^n\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{n^2-n+3} - \sqrt{n^2+(1-(-1)^n)n}$;

$\frac{\ln(1+2^n)}{n}$; $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; $n - \ln(1+2^n)$; $\frac{\ln(3^n-2^n)}{\ln(3^n+2^n)}$;

$2^n\cdot\ln(1+2^{-n})$; $\frac{2^{n^2}}{n!}$; $n\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}-1\right)$; $\left(1+\frac{1}{[\sqrt{n}]^2}\right)^n$;

$[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

14* Dla ciągu a_n wiadomo, że $\lim\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$. Wykazać, że $\lim a_n = 0$.

15* Permutacją (przestawieniem) ciągu a_n nazywamy ciąg $b_n = a_{\tau(n)}$, gdzie $\tau: N \to N$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych tzn. różnowartościowym odwzorowaniem N na N. Np. $2,1,4,3,6,5,\dots$ jest permutacją ciągu naturalnego $1,2,3,4,\dots$. Czy permutacja ciągu zbieżnego jest ciągiem zbieżnym?

Analiza matematyczna I rok matem. WPPT
Lista zadań nr 3.

1. Dany jest ciąg $x_n \in R$. Niech $F_n = \{x : x = x_k, k \geq n\}$. Jakie własności ciągu x_n opisują warunki:
(α) F_n jest zbiorem dwuelementowym dla $n \geq 10$;
(β) $F_n \subset F_{n+1}$, $n \in N$;
(γ) $F_n \setminus F_{n+1} \neq \emptyset$ dla $n \in N$.

2. Dany jest ciąg $a_n \in R$. Niech $d_n = \inf\{x : x = a_k, k \geq n\}$ i $D_n = \sup\{x : x = a_k, k \geq n\}$. Czy prawdziwe są zdania:
(i) Jeżeli ciąg a_n jest zbieżny i ma granicę g, to $\lim d_n = \lim D_n = g$.
(ii) Jeżeli ciągi d_n i D_n są zbieżne i $\lim d_n = \lim D_n = g$, to $\lim a_n = g$.
(iii) Jeśli a_n jest ciągiem ograniczonym, to ciągi d_n i D_n są zbieżne i $\lim d_n \leq \lim D_n$.
(iv) Jeśli ciąg a_n jest ograniczony i $\lim (D_n - d_n) = 0$, to ciąg a_n jest zbieżny?

3. Ciąg a_n jest ograniczony z góry, $a_n \leq a_{n+2}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, $\lim (a_{n+1} - a_n) = 0$. Pokazać, że ciąg a_n jest zbieżny.

4.* Podać przykład ciąg a_n o wyrazach dodatnich, ograniczonego i rozbieżnego, dla którego istnieje granica $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i jest równa 1.

5. Opierając się na definicji pokazać, że
$\lim \sqrt{n} = \infty$; $\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

6. Udowodnić, że z ciągu nieograniczonego z góry można wybrać podciąg ściśle rosnący do ∞.

7. Ciąg a_n jest monotoniczny i zawiera podciąg zbieżny do ∞. Pokazać, że $\lim a_n = \infty$.

8. Ciąg a_n jest ograniczony z góry i $\lim b_n = -\infty$. Pokazać, że $\lim (a_n + b_n) = -\infty$.

9. $a_n \geq M > 0$ i $\lim b_n = \infty$. Pokazać, że $\lim a_n b_n = \infty$.
Czy prawdziwa jest implikacja: $a_n > 0$ i $\lim b_n = \infty \Rightarrow \lim a_n b_n = \infty$?
$a_n > 0$, $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = \infty$, czy ciąg $a_n b_n$ musi mieć granicę?

10. $|a_n| \leq M$ i $\lim b_n = \infty$. Pokazać, że $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

11. Zbadać zbieżność ciągów w $R \cup \{-\infty, \infty\}$ i wyznaczyć granice jeśli istnieją:

$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$; $\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$; $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$; $\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)^n$;

$\left(\frac{n+(-1)^n}{n+1}\right)^n$; $\frac{2^n+(-3)^n}{1+3^n}$; $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}$; $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$;

$n-\log(1+2^n)$; $n-\sqrt{n}\sin n$; $\log_n n!$, $n \geq 2$; $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$;

$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$; $(-1)^{[\sqrt{n+1}]}-(-1)^{[\sqrt{n}]}$; $n^{\sin\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{n!}$.

12. Wiadomo, że $a_n > 0$, $a_n < a_{n+1}$ i $\lim \frac{a_{2n}}{a_n} = c$, $c > 1$. Pokazać, że $\lim a_n = \infty$. Sprawdzić, czy istnieje granica $\lim \frac{\ln a_n}{\ln n}$.

13. Ciąg liczb wymiernych $\frac{p_n}{q_n}$, $(p_n, q_n) = 1$, $q_n \geq 1$, dąży do liczby niewymiernej. Pokazać, że $\lim q_n = \infty$.

Def. Element s zbioru $R \cup \{-\infty, \infty\}$ nazywamy punktem skupienia ciągu a_n jeżeli s jest granicą pewnego podciągu ciągu a_n. Każdy ciąg ma co najmniej jeden punkt skupienia (dlaczego?), a jedynym punktem skupienia ciągu zbieżnego do g jest punkt g.

14. Wyznaczyć zbiory punktów skupienia ciągów:

$a_n = \sin\frac{\pi n}{12}$; $b_n = \frac{3}{5}n - \left[\frac{3}{5}n\right]$; $c_n = n\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$; $d_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$;

e_n, gdzie $e_0 = 0$, $e_{n+1} = e_n + \frac{1}{n}$ jeśli $e_n \leq 1$ i $e_{n+1} = e_n - 1$ jeśli $e_n > 1$.

Def. Kres dolny (górny) zbioru punktów skupienia ciągu a_n nazywamy granicą dolną (górną) tego ciągu i oznaczamy: $\underline{\lim}\, a_n$ lub $\liminf a_n$ (i odpowiednio $\overline{\lim}\, a_n$ lub $\limsup a_n$).

15. Wyznaczyć granice dolną i górną ciągów z zad. 14.

16. Udowodnić, że liczba G jest granicą górną ciągu a_n wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego dodatniego ε spełnione są dwa warunki

1° zbiór $\{n : a_n > G+\varepsilon\}$ jest skończony,

2° zbiór $\{n : a_n > G-\varepsilon\}$ jest nieskończony.

17* Wyznaczyć $\underline{\lim}\sin n$ i $\overline{\lim}\sin n$.

Analiza matematyczna I r matem. WPPT
Lista zadań nr 4.

1. Czy funkcje: $\varrho(x,y) = |2x-y|$; $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ są metrykami w R?

2. Czy funkcja $\varrho(x,y) = |x-y| + |\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y|$ jest metryką w R? Jeśli tak, to jaką interpretację geometryczną można nadać tej metryce? Znaleźć kule $S(0,1)$; $S(0,2)$ oraz $S(1,2)$.

3. Funkcja $f: R \to R$ spełnia warunki: $f(0)=0$, $f(x)>0$ dla $x \neq 0$ i $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$. Pokazać, że funkcja $d(x,y) = f(x-y)+f(y-x)$ jest metryką w R. Podać przykłady tak zbudowanych metryk w R.

4. Punkty A i B leżące na okręgu o obwodzie 1 dzielą ten okrąg na dwa łuki o długościach x i $1-x$ (może być $x=1$ lub $x=0$, jeśli $A=B$). Czy funkcja $\varrho(A,B) = x(1-x)$ jest metryką na tym okręgu? Jaką interpretację fizyczną ma ta funkcja?

5. Funkcje $d(x,y)$ i $\varrho(x,y)$ są metrykami w zbiorze X. Czy funkcje: $\max\{d(x,y), \varrho(x,y)\}$; $\min\{d(x,y), \varrho(x,y)\}$; $\min\{1, d(x,y)\}$ i $\sqrt{d^2(x,y)+\varrho^2(x,y)}$ są również metrykami w X?

6. Czy ciąg $x_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny w przestrzeni R z metryką podaną w zadaniu 2? Jeśli tak, to jaką ma granicę?

7. Udowodnić następujące własności kul otwartych w przestrzeni metrycznej (X,d):

$$(\alpha) \quad \bigwedge_{z \in S(x,r_1) \cap S(y,r_2)} \ \bigvee_{S(z,\varepsilon)} \ S(z,\varepsilon) \subset S(x,r_1) \cap S(y,r_2);$$

$$(\beta) \quad \bigwedge_{y \in S(x,r) \setminus \{x\}} \ \bigvee_{S(y,\varepsilon)} \ S(y,\varepsilon) \subset S(x,r) \setminus \{x\}.$$

8. Czy prawdziwe jest zdanie:
Jeśli $y \notin S(x,r)$, to istnieje kula $S(y,\varepsilon)$ taka, że
$$S(y,\varepsilon) \cap S(x,r) = \emptyset \ ?$$

Rozpatrzyć przypadek przestrzeni R z naturalną metryką $d(x,y) = |x-y|$ oraz R z metryką dyskretną $d(x,y) = 1$ dla $x \neq y$

9. Niech R będzie zbiorem liczb rzeczywistych z naturalną metryką $d(x,y)=|x-y|$ i niech A i B będą podzbiorami R

$$A=\{x\in R:\ x=\frac{1}{n}+\frac{1}{m};\ n,m\in N\};$$

$$B=\{x\in R:\ x=\frac{3n-m}{n+m};\ n,m\in N\}.$$

Wyznaczyć punkty skupienia zbiorów A i B.

10. Co można powiedzieć o zbiorze $A\setminus B$ jeżeli: (α) A i B są zbiorami otwartymi, (β) A jest zbiorem otwartym, a B jest zbiorem domkniętym?

11*. Niech R będzie przestrzenią metryczną z metryką naturalną $d(x,y)=|x-y|$. Pokazać, że zbiór $A\subset R$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą skończonej lub przeliczalnej liczby odcinków otwartych.

12. Wyznaczyć sumy częściowe podanych szeregów i wyznaczyć granice tych sum

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n-(-1)^n)};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}.$$

13. Zbadać zbieżność szeregów: $\sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; $\sum\left(2-\frac{1}{n}\right)^n$; $\sum\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$; $\sum\frac{n^2-1}{n^4-n+1}$; $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}n\right)^n$; $\sum\frac{n!}{n^n}$; $\sum\frac{(n!)^2}{n^n}$; $\sum\frac{n!}{2^{n^2}}$; $\sum\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$; $\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; $\sum\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n}}$; $\sum\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; $\sum\frac{1}{2^{[\sqrt{n}]}}$, $\sum\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$;

14. Ciąg a_n o wyrazach dodatnich spełnia warunki: $a_{n+1}\le a_n$ i $\lim a_n=0$. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{k=0}^{\infty}2^k\cdot a_{2^k}$.

Wykorzystać to kryterium do zbadania zbieżności lub rozbieżności szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s>0;\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^s},\ s>0;\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^4};\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$$

Analiza matematyczna I r matem, WPPT
Lista zadań nr 5.

1. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{4}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2\ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot\sin\frac{1}{n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-(-1)^n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(-1)^{[\sqrt{n}]}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}\ ;$$

2. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Czy zbieżne są szeregi $\sum a_n^2$, $\sum a_n^3$? Rozpatrzyć przypadki: $a_n>0$, a_n - dowolne.

3. Szereg $\sum a_n^2$ jest zbieżny. Czy zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$?

4. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny i $a_n>0$. Czy zbieżne są szeregi:

$$\sum \sqrt[n]{a_n}\ ;\ \sum \sin a_n\ ;\ \sum \frac{n a_n}{n+a_n}$$

5. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Czy zbieżny jest szereg $\sum (2+(-1)^n)a_n$?

6. Szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne. Zbadać zbieżność szeregów: $\sum a_n b_n$; $\sum \min\{a_n, b_n\}$; $\sum \max\{a_n, b_n\}$. Rozpatrzyć przypadki: a_n, b_n - dodatnie; a_n, b_n - dowolne.

7. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Zbadać zbieżność szeregów $\sum b_n$ i $\sum c_n$, gdzie $b_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $c_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\}$. Rozpatrzyć przypadki: $a_n>0$ i a_n - dowolne.

8. $a_n = \frac{1}{n^2}$ jeśli indeks n nie jest kwadratem liczby naturalnej i $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, jeśli liczba n jest kwadratem liczby naturalnej. Zbadać zbieżność szeregów: $\sum a_n$ i $\sum (-1)^n a_n$.

9. Podać przykład takiego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, żeby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln(n+1) = \infty$.

10*. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...

11. Szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są bezwzględnie zbieżne. Pokazać, że szereg $\sum a_n \cdot b_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Czy wystarczy założyć, że jeden z tych szeregów jest bezwzględnie zbieżny, a drugi zbieżny?

12. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Czy zbieżne są szeregi $\sum (a_{n+1} - a_n)$ i $\sum |a_{n+1} - a_n|$? Jaka byłaby odpowiedź, gdyby szereg $\sum a_n$ był bezwzględnie zbieżny?

13. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$? Czy musi być zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$?

14. Ciąg a_n jest zbieżny do 0. Rozważamy dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Czy szeregi te mogą być zbieżne jednocześnie? Czy zbieżność jednego z tych szeregów wymusza zbieżność drugiego?

15. Ciąg a_n maleje do 0. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_{n+1} - a_n)$ musi być zbieżny?

16* Ciąg a_n maleje do 0 i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Pokazać, że $\lim n a_n = 0$.

17. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \cos a_n$ dla $n \geq 1$.

18. Niech $a_n > 0$ i niech $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Pokazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ jest także rozbieżny.

19*. Ciąg x_n spełnia warunki: $x_1 = a > 1$ i $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ dla $n \geq 1$. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a-1}$$

Analiza matematyczna I r matem. WPPT

Lista zadań nr 6.

1. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie, tzn. jest zbieżny warunkowo. (Wykorzystać nierówność: $|\sin n| > \sin^2 n$). Niech $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin n}{n} = S_m^+ + S_m^-$, gdzie S_m^+ i S_m^- oznacza się część sumy S_m złożoną z wyrazów dodatnich i odpowiednio część sumy S_m złożoną z wyrazów ujemnych. Pokazać, że istnieje granica $\lim_{m\to\infty} \frac{S_m^+}{S_m^-}$ i obliczyć ją.

2.* $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Tworzymy zbiór $S = \{x : x = \sum_{i\in I} a_i\}$, gdzie I przebiega wszystkie podzbiory zbioru $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Przyjmujemy, że $\sum_{\emptyset} a_i = 0$. Pokazać, że $S = \langle 0, \infty)$.

3.* $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Czy można tak dobrać ciąg ξ_n, $\xi_n \in \{-1, 1\}$, aby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n$ był zbieżny? Jakie sumy S_ξ można uzyskać w taki sposób?

4. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest sumowalny z kwadratem, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Zbiór wszystkich ciągów oznaczamy przez ℓ^2. Pokazać, że jeśli ciągi $\{a_n\}, \{b_n\} \in \ell^2$, to $\{\lambda a_n\} \in \ell^2$ dla $\lambda \in R$, $\{a_n\} + \{b_n\} \in \ell^2$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wywnioskować stąd, że zbiór ℓ^2 z naturalnym dodawaniem $(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ po współrzędnych oraz z mnożeniem $\lambda \cdot (a_1, a_2, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots)$ jest przestrzenią liniową, w której funkcjonał $(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $a = (a_1, a_2, \dots)$, $b = (b_1, b_2, \dots)$ jest iloczynem skalarnym, a $\|a\| = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$ jest normą, spełniającą warunki: 1° $\|a\| \geq 0$ i $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, \dots)$, 2° $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$,

3° $|(a,b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, 4° $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$. Podać uzasadnienie. Pokazać też, że funkcja $d(a,b) = \|a-b\|$ jest metryką w ℓ^2.

5. Sprawdzić, czy iloczyn Cauchy'ego szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ jest szeregiem zbieżnym.

6. Pokazać, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right)$ dla $x, y \in R$.

7. Udowodnić, że $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Pokazać też, że

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

i korzystając z tego oszacowania udowodnić niewymierność liczby e.

8. Udowodnić, że liczba $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ jest niewymierna.

9. Szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne (bezwzględnie zbieżne). Niech $d_n = a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_0$. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ jest zbieżny (bezwzględnie zbieżny)? Czy sumą tego szeregu jest iloczyn $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$? (Mnożenie szeregów w/g Dirichleta).

10. Zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{n}.$$

11. Ciąg a_n jest rosnący i $a_n \in N$. Wiadomo, że $\lim (a_{n+1} - a_n) = \infty$. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ musi być zbieżny?

12. Ciąg a_n spełnia warunki: $a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i ma sumę 5 i dla każdego $n \geq 1$ prawdziwa jest równość:

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Znaleźć ciąg a_n.

13*. $x \in \langle 0,1)$. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2\{2^{-1}[2^n x]\}} \cdot 2^{-n}$, gdzie $[a]$ - część całkowita liczby a i $\{a\} = a - [a]$.

Analiza Matematyczna, I r. matem. WPPT
Lista zadań nr 7.

1. Podać przykład funkcji $f: R \to R$, która ma granicę tylko w dwóch punktach $x=-1$ i $x=2$.

2. Podać przykład funkcji różnowartościowej $f: \langle 0,\infty) \to \langle 0,\infty)$, która jest liniowa na każdym odcinku $(n, n+1)$, $n=0,1,2,\dots$, jest rosnąca na odcinkach $(2n, 2n+1)$ i jest malejąca na odcinkach $(2n+1, 2n+2)$, $n=0,1,2,\dots$.

3. Opierając się na definicji granicy wykazać, że:
$\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} x[x]$, $\lim\limits_{x\to\infty} (x - [\sqrt{x}])$;

4. Dana jest funkcja $f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$ określona dla $x \neq 0$. Naszkicować wykres tej funkcji i obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, jeśli ta granica istnieje.

5. Funkcja $f: \langle 0,\infty) \to R$ jest niemalejąca i $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$. Czy istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

6. Obliczyć granice:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+1} - 1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{\operatorname{tg} 2x}$;
$\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{4}{1-x^4} - \frac{3}{1-x^3}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin 2x}\right)$;
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$; $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

7. Korzystając z nierówności $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, udowodnić, że

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sin x < x, \quad \text{dla } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}),$$

a następnie obliczyć granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{\sqrt{1+x^3} - 1}$$

8. Obliczyć granice: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$;
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

9. Wyznaczyć liczby a i b wiedząc, że

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=1.$$

10. Obliczyć granice: $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x$; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$;

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{x}+\frac{1}{x}\right)^x$; $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x$; $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$.

11. Obliczyć granice: $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}$;

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x}$; $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$;

$\lim_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$; $\lim_{x\to 0} x\left(\sqrt[x]{a}-\sqrt[x]{b}\right)$,

12. Obliczyć granice: $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{2x-\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x}{\frac{\pi}{2}-\arccos x}$

13. Obliczyć granice jednostronne podanych funkcji w zaznaczonych punktach: $f(x)=\frac{\sqrt{\sin x^2}}{\sin x}$ w punkcie $x=0$;

$g(x)=\frac{\sin(x-[x])}{x-1}$ w p. $x=1$; $h(x)=\left(1+\sqrt[x]{2}\right)$ w p. $x=0$;

14. Zbadać istnienie granic: $\lim_{x\to\infty}\sin x^2$;

$\lim_{x\to\infty}\left((-1)^{[\sqrt{x}]}-(-1)^{[\sqrt{x+1}]}\right)$; $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-x\right)$; $\lim_{x\to 0^+}\left(\sin\frac{2}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$,

15. Funkcja $f:\langle 0,1\rangle$ określona jest w następujący sposób:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{p}{p+q^2} & \text{dla } x \text{ wym. postaci } \frac{p}{q},\ (p,q)=1\\ 0 & \text{dla } x \text{ niewym.}\end{cases}$$

Przyjmujemy, że $0=\frac{0}{1}$, a więc $f(0)=0$.
W jakich punktach przedziału $\langle 0,1\rangle$ funkcja ta ma granicę? Wyznaczyć te granice.

16. Funkcja $f:\langle 0,\infty)\to R$ jest ograniczona na każdym skończonym przedziale $\langle 0,a\rangle$ i $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=g$. Pokazać, że $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=g$.

17* Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są okresowe i $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$, Pokazać, że $f(x)\equiv g(x)$.
Uwaga! Nie wiemy czy funkcje f i g mają wspólny okres.

Analiza matematyczna I r. matem WPPT
Lista zadań nr 8.

1. Opierając się na definicji ciągłości funkcji wykazać, że

a) funkcja $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ jest ciągła w punkcie $x=1$;

b) funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny określoności;

c) funkcja $h(x) = x - [x]$ jest ciągła w każdym punkcie zbioru $R \setminus Z$, nie jest natomiast ciągła w punktach zbioru Z.

2. Korzystając z definicji ciągłości w/g Heine'go pokazać, że funkcja: $F(x) = 0$ dla x niewymiernych i $F(x) = \frac{1}{q}$ dla x wymiernych postaci $\frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym przedziału $\langle 0,1 \rangle$ i jest nieciągła w każdym punkcie wymiernym tego przedziału. Przyjmujemy, że $f(0) = f(\frac{0}{1}) = \frac{1}{1} = 1$.

3. Funkcja f określona w otoczeniu punktu 0 spełnia warunek: $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} |h| < \delta \Rightarrow |f(h) - f(-h)| < \varepsilon$.

Czy f jest funkcją ciągłą w punkcie $x=0$? Czy musi istnieć granica $\lim_{x\to 0} f(x)$?

4. Wyznaczyć punkty ciągłości i nieciągłości podanych funkcji: $f(x) = \sin \pi(x - [x])$, $x \in R$;

$g(x) = \frac{\sin \pi x}{x - [x]}$ dla $x \notin Z$ i $g(x) = \pi$ dla $x \in Z$;

$h(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$; $w(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ (\sqrt{2})^{-1} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

5. Dane są funkcje $f, g : R \to R$. Wiadomo, że funkcje $|f(x) + g(x)|$ i $|f(x) - g(x)|$ są ciągłe w R. Czy funkcje $f(x)$ i $g(x)$ muszą być ciągłe? Czy jedna z nich może być ciągła, a druga nieciągła? Czy obie funkcje, zarówno f i g mogą być nieciągłe?

6. Zbadać ciągłość funkcji $f(g(x))$ i $g(f(x))$ jeśli $f(x) = \operatorname{sgn} x$, a $g(x) = 1 + x - [x]$.

7. Funkcje $f, g : (a,b) \to R$ są ciągłe na (a,b). Pokazać, że funkcje: $u(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ i $v(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, są również ciągłe na (a,b). Czy z ciągłości funkcji $u(x)$ i $v(x)$ wynika ciągłość funkcji $f(x)$ i $g(x)$?

8. Funkcja $f : \langle 0, \infty) \to R$ jest ciągła na $\langle 0, \infty)$. Czy funkcja $M(x) = \max\limits_{t \in \langle 0, x \rangle} f(t)$ jest ciągła dla $x \geq 0$?

9. Funkcja $f(x)$ jest ograniczona na przedziale (a,b). Pokazać, że funkcja $m(x) = \inf\limits_{t \in (a,x)} f(t)$, $x \in (a,b)$, ma w każdym punkcie przedziału (a,b) granice jednostronne i jest lewostronnie ciągła. Naszkicować wykres funkcji $m(x)$ na półprostej $(0, \infty)$ dla funkcji $f(x) = x - 2[x]$.

10. Podać przykład funkcji $f(x)$, ciągłej na R i takiej, że równanie $f(x) = b$ ma dokładnie trzy różne pierwiastki dla każdego $b \in R$. Czy można podać przykład funkcji ciągłej na R, dla której równanie $f(x) = b$ ma dwa pierwiastki (dokładnie) dla każdego $b \in R$? Czy istnieje funkcja ciągła na R, dla której równanie $f(x) = b$ ma nieskończenie wiele różnych pierwiastków dla każdego $b \in R$?

11. Funkcja $f : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ jest ciągła. Pokazać, że istnieje taki punkt $\xi \in \langle 0,1 \rangle$, że $f(\xi) = \xi$ (punkt stały odwzorowania f). Funkcja $f : \langle 0,1 \rangle \to R$ jest ciągła i spełnia warunek: $\langle 0,1 \rangle \subset f(\langle 0,1 \rangle)$. Czy musi mieć punkt stały?

12. Funkcja f jest ciągła na $\langle 0,1 \rangle$ i $f(0) = f(1)$. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją na odcinku $\langle 0,1 \rangle$ takie dwa punkty x_1 i x_2, że $x_2 - x_1 = \frac{1}{n}$ i $f(x_1) = f(x_2)$.

13. Funkcja $f : \langle 0,2 \rangle \to R$ jest ciągła na $\langle 0,2 \rangle$. Pokazać, że istnieją dwa punkty u i v, $u, v \in \langle 0,2 \rangle$ takie, że $v - u = 1$ i $f(v) - f(u) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$.

Analiza matematyczna I r. matem WPPT

Lista zadań nr 9.

1. Sprawdzić czy podane niżej równania mają rozwiązania w R? $3^x - 2^x = 5$; $x \ln x = 2$; $x^8(1-x^6) = 1$.

2. Funkcja $f: R \to R$ jest ciągła na R. Wiadomo, że równanie $f(f(f(x))) = x$ ma rozwiązanie w R. Pokazać, że równanie $f(x) = x$ ma również rozwiązanie w R.

3*. Odwzorowanie $f: R \to R$ spełnia warunek: istnieje stała λ, $\lambda < 1$, że dla dowolnej pary punktów $x, y \in R$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$ (odwzorowanie jednostajnie przybliżające). Udowodnić, że f jest odwzorowaniem ciągłym i ma punkt stały (istnieje $p \in R$, że $f(p) = p$). Wskazówka. Rozważyć ciąg $\{x_n\}$, gdzie x_0 jest dowolnym punktem prostej R oraz $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, i wykorzystać warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu w R. Czy odwzorowanie $f: R \to R$ spełniające warunek: $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ dla dowolnych $x \neq y$ (odwzorowanie przybliżające) musi mieć punkt stały w R? Rozpatrzyć przykład: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ dla $x > 0$ i $f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$ dla $x \leq 0$. Podać też własny przykład takiego odwzorowania.

4*. Odwzorowanie $f: R \to R$ jest przybliżające tzn. $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ dla dowolnych $x, y \in R$, $x \neq y$. Wiadomo, że $f(f(f(0))) = 0$. Pokazać, że $f(0) = 0$.

5*. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f: R \to R$ spełniające równanie: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, $x, y \in R$.

6. Podać przykład funkcji nieciągłej na odcinku $\langle 0,1 \rangle$, która na każdym odcinku $\langle a,b \rangle$ zawartym w $\langle 0,1 \rangle$ osiąga swoje kresy i przyjmuje każdą wartość pośrednią pomiędzy $\min\limits_{\langle a,b \rangle} f(x)$ i $\max\limits_{\langle a,b \rangle} f(x)$.

7. Pokazać, że jeśli funkcja $f: (a,b) \to R$ jest monotoniczna i ma własność Darboux, to jest ciągła.

8. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $y = x + [x]$ i zbadać ciągłość otrzymanej funkcji.

9. Podać przykłady funkcji $f: R \to R$, dla których $f(x) = f^{-1}(x)$ dla $x \in R$. Podać przykłady funkcji ciągłych i nieciągłych.

10. Funkcje f i g są określone na półprostej $(0,\infty)$, są wzajemnie odwrotne i malejące. Czy nierówność $f(x) > g(x)$ może być spełniona dla każdego $x \in (0,\infty)$?

11*. Pokazać, że każdy zbiór otwarty na prostej R jest sumą co najwyżej przeliczalnej ilości odcinków otwartych parami rozłącznych.

12*. Mówimy, że funkcja $F: E \to R$ jest rozszerzeniem funkcji $f: \mathcal{D} \to R$ do zbioru E, jeżeli $\mathcal{D} \subset E$ i $F(x) = f(x)$ dla $x \in \mathcal{D}$. Czy każdą funkcję ciągłą na zbiorze $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset R$, można rozszerzyć do funkcji ciągłej na całym zbiorze R? Czy każdą funkcję ciągłą na domkniętym podzbiorze prostej R można rozszerzyć do funkcji ciągłej na całej prostej R? (Wykorzystać zadanie 11*)

13*. $f: R \to R$ jest funkcją ciągłą na R. Niech A będzie zbiorem tych punktów $x \in R$, w których f ma lokalne maksimum i niech $M = f(A)$. Pokazać, że M jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

14*. Czy istnieje ciągła funkcja $f: R \to R$ taka, że $f(Q) \subset R \setminus Q$, a $f(R \setminus Q) \subset Q$?

15. Zbadać jednostajną ciągłość podanych funkcji w zaznaczonych zbiorach: a) $y = \sqrt{x}$; $x \in \langle 0,1 \rangle$ oraz $x \in \langle 0,\infty)$

b) $y = \sin x^2$; $x \in \langle -1,1 \rangle$ oraz $x \in R$,

c) $y = x + \sin x$; $x \in R$;

d) $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$; $x \in R$.

16. Funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na odcinku otwartym (a,b). Czy musi być funkcją ograniczoną? Czy musi mieć granice jednostronne przy $x \to a^+$ i $x \to b^-$? Rozpatrzyć przypadki: $-\infty < a < b < \infty$, $a = -\infty$ oraz $b = \infty$.

Analiza matematyczna, I r. matem. WPPT.
Lista zadań nr. 10.

1. Zbadać istnienie pochodnej (pochodnych jednostronnych) niżej podanych funkcji, opierając się na definicji pochodnej: $f(x) = x\cdot|x|$ w punkcie $x=0$; $g(x) = |1-x^2|$ w punktach $x=0$ i $x=1$; $h(x) = \sqrt{\sin x^2}$ w punkcie $x=0$, $p(x) = x\sin\frac{1}{x}$ dla $x\neq 0$ i $p(0)=0$ w punkcie $x=0$.

2. Funkcja $f(x)$ określona w otoczeniu punktu $x=a$ jest ciągła w punkcie $x=a$. Czy funkcje: $f_1(x) = (x-a)\cdot f(x)$ i $f_2(x) = \sqrt[3]{x-a}\cdot f(x)$ mają pochodną w punkcie $x=a$? Rozpatrzyć przypadek $f(a)\neq 0$ oraz różne przypadki funkcji $f(x)$, które w punkcie $x=a$ mają wartość 0.

3. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x=a$. Czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(a+\frac{1}{n}) - f(a)\right)$? Czy istnienie tej granicy pociąga za sobą różniczkowalność funkcji $f(x)$ w punkcie $x=a$?

4. Sprawdzić, czy funkcja $\sin x\cdot\sqrt{|\sin x|}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie x prostej R? Podać też wzór na pochodną tej funkcji. Czy $f'(x)$ jest funkcją ciągłą w swojej dziedzinie?

5. Funkcja $f^2(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x=a$. Czy $f(x)$ musi być funkcją różniczkowalną w tym punkcie? Czy $f(x)$ musi być funkcją ciągłą w $x=a$?

6. Obliczyć pochodną – tam gdzie istnieje – każdej z niżej podanych funkcji: $y = \arccos\sqrt{2x-x^2}$; $y = \log_x(1+x^2)$; $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $y = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$; $y = \cos(\arcsin x)$; $y = \sqrt[x]{e}$; $y = x^{\sin x}$.

7. Wyznaczyć $f'(x)$, $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ i $f''(x)$ jeśli:
a) $f(x) = \sin(\pi(x-[x]))$; b) $f(x) = [x]\cdot\sin\pi x$; c) $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

8. Znaleźć $f^{(n)}(x)$ jeśli: a) $f(x) = \cos x$; b) $f(x) = xe^{-x}$; $n = 1, 2, \ldots$.

9. Funkcja $g(x)$ ma pochodne do n-tego rzędu włącznie i $f(x) = (x-a)g(x)$. Obliczyć $f^{(n)}(x)$.

10. Udowodnić wzór

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x), \quad \left(f^{(0)}(x) \overset{df}{=} f(x)\right).$$

11. Funkcja $f(x)$ jest okresowa o okresie T i jest różniczkowalna na prostej R. Pokazać, że jej pochodna $f'(x)$ jest również funkcją okresową o okresie T. Czy tw. odwrotne jest prawdziwe?

12. Funkcja $f(x)$ jest nieparzysta i różniczkowalna w punkcie $x=0$. Wiadomo też, że funkcja $g(x)=|f(x)|$ jest różniczkowalna w punkcie $x=0$. Czy można obliczyć $f'(0)$?

13. Funkcja $f(x)$ jest określona w otoczeniu punktu $x=a$ i ma w tym punkcie skończoną pochodną $f'(a)$. Znaleźć granicę

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

Załóżmy teraz, że granica $(*)$ istnieje i jest liczbą skończoną. Czy wtedy istnieje $f'(a)$? Czy f musi być funkcją ciągłą w punkcie $x=a$? Podać różne przykłady.

14. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna na przedziale (a,b) i $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. Czy istnieje taki punkt $c\in(a,b)$, że $f'(c)=0$? Czy można przyjąć $a=-\infty$ i $b=+\infty$?

15. Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $\langle a,b)$ i ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Pokazać, że jeśli istnieje granica $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A$, to funkcja f ma w punkcie $x=a$ pochodną prawostronną i $f'_+(a)=A$.

16. Funkcja $f: R\to R$ spełnia równanie $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $x,y\in R$, i ma w punkcie $x=0$ skończoną pochodną $f'(0)=p$. Pokazać, że f jest funkcją różniczkowalną na R i spełnia równanie różniczkowe: $f'(x)=pf(x)$. Podać interpretację tego faktu i rozpatrzyć przypadki: $p=0$, $p=-1$, $p=1$.

17. Znaleźć równanie stycznej do krzywej $y=\ln(3+x^2)$:
a) równoległej do prostej $x-2y-1=0$; b) prostopadłej do prostej $x+2y+3=0$. Ile jest takich stycznych? Czy na tej krzywej istnieje taki punkt $A(a,b)$ w którym styczna tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox kąt ostry większy niż $30°$?

Lista 11. Analiza matematyczna, I r. matem. WPPT

1. Znaleźć pochodne jednostronne funkcji $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ w punkcie $x=0$ i napisać równania stycznych jednostronnych do krzywej $y=f(x)$ w tym punkcie.

2. Czy istnieje styczna do krzywej $y=f(x)$, gdzie $f(x) = x\cdot[\frac{1}{x}]$, dla $x \neq 0$ i $f(0)=1$, w punkcie $(0,1)$?

3. Funkcja $f: R \to R$ spełnia warunek:

$$|f(x)-f(y)| \leq (x-y)^2, \quad x,y \in R,$$

Pokazać, że f jest funkcją stałą.

4. Funkcja $f: \langle a,b\rangle \to R$ jest różniczkowalna na $\langle a,b\rangle$ i $f(a)=f(b)$. Pokazać, że istnieją takie dwa punkty $\xi, \eta \in (a,b)$, $\xi \neq \eta$, że $f'(\xi)+f'(\eta)=0$.

5. Funkcja $f: \langle 0,1\rangle \to R$ jest różniczkowalna na $\langle 0,1\rangle$, $f'(0)=1$ i $f'(1)=0$. Pokazać, że istnieje c, $c \in (0,1)$ takie, że $f'(c)=c$. Wskazówka. Rozważyć funkcję pomocniczą $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$.

6* Funkcja $f(x)$ jest ciągła na $\langle 0,1\rangle$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Ponadto $f(0)=f(1)=0$. Pokazać, że istnieje punkt c, $c \in (0,1)$ taki, że $f'(c)=f(c)$.

7*. Funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na odcinku $\langle 0,1\rangle$ i równanie $f(x)=0$ ma na tym odcinku co najmniej trzy różne pierwiastki. Pokazać, że istnieje punkt c, $c \in (0,1)$ taki, że $f(c)+f''(c)=2f'(c)$.

8. Funkcja $f(x)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $\langle 0,1\rangle$ i ma pochodną $f''(x)$ w każdym punkcie przedziału $(0,1)$. Ponadto $f(0)=f(1)=f'(1)=0$. Pokazać, że $f''(c)=0$ w pewnym punkcie $c \in (0,1)$.

9. Funkcja f jest klasy C^{n-1} na przedziale $\langle x_0, x_n \rangle$ i w każdym punkcie przedziału (x_0, x_n) istnieje $f^{(n)}(x)$. Wiadomo, że $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$, gdzie $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Pokazać, że $f^{(n)}(c) = 0$ w pewnym punkcie c przedziału (x_0, x_n).

10. Udowodnić tożsamość

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x \quad \text{dla } |x| \geq 1.$$

11. Ustalić związki pomiędzy funkcjami:
$f(x) = \operatorname{arctg} x$; $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$.

12. Funkcja $f: R \to R$ ma pochodną w każdym punkcie $x \in R$ równą 1 i $f(0) = 2$. Pokazać, że $f(x) = x + 2$.

13. Udowodnić, że $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ dla $0 < b < a$.

14. Dobrać liczbę K tak, aby dla $x, y \in \langle 1, 3 \rangle$ zachodziła nierówność

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq K |x - y|,$$

15. Funkcje f i g są ciągłe w punkcie $x = a$ i dla $x > a$ jest $f'(x) < g'(x)$ $(f'(x) \leq g'(x))$. Pokazać, że jeśli $f(a) \leq g(a)$, to dla $x > a$ jest $f(x) < g(x)$ $(f(x) \leq g(x))$.

16. Wykazać nierówności: $e^{x-1} > x$ dla $x \neq 0$; $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ dla $x > 0$; $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

17. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna na półprostej $x \geq 0$ i $-1 \leq f'(x) \leq 2$ dla $x \geq 0$. W jakim obszarze leży wykres funkcji $y = f(x)$ dla $x \geq 0$?

18*. Opisać klasę funkcji $f: R \to R$ spełniających warunek:

$$|\sin h| \leq |f(x+h) - f(x)| \leq |\operatorname{tg} h| \quad \text{dla } x \in R \text{ i } h \in \langle -1, 1 \rangle.$$

19. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne dla funkcji: $f(x) = x - 2\sin x$, $g(x) = x + |\sin 2x|$; $h(x) = x^2 - \ln x^2$; $p(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$. Naszkicować wykresy.

Analiza matematyczna, I r. matem. WPPT
Lista zadań nr 12.

1. Obliczyć granice: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{x-\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$;
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[x]{1+x}-e}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$;
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}$;
$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[x]{1+x}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{x+1}-1\right)$.

2. Napisać wzór Taylora-Maclaurina z resztą Lagrange'a dla funkcji: $f(x)=\cos x$ (dla dowolnego n), $g(x)=\sin(\sin x)$ dla $n=3$.

3. Napisać wzor Taylora-Maclaurina z resztą Cauchy'ego dla funkcji: $f(x)=\ln(1+x)$ oraz $g(x)=(1+x)^\alpha$.

4. Oszacować błąd przybliżeń:
$\operatorname{tg}x \approx x+\frac{1}{3}x^3$ w przedziale $|x|\le 0{,}1$;
$\sqrt{1-x}\approx 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ w predziale $|x|\le\frac{1}{2}$,
$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\dots+\frac{x^9}{9!}$ w przedziale $|x|\le 1$.

5.* Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

6. Funkcja $f(x)$ jest trzykrotnie różniczkowalna na R i $f(0)\ge 0$, $f'(0)\ge 0$, $f''(0)>0$ i $f'''(x)\ge 0$ dla $x>0$. Pokazać, że $f(x)>ax^2$ dla $x>0$ przy pewnym dodatnim a.

7. Funkcja $f:R\to R$ ma na prostej R pochodną piątego rzędu równą zero ($f^{(V)}(x)=0$ dla $x\in R$). Pokazać, że $f(x)$ jest wielomianem co najwyżej czwartego stopnia.

8* Funkcja $f(x)$ ma na przedziale $(-1,1)$ pochodne do rzędu $n+1$, $f^{(n+1)}(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=0$ i ma w tym punkcie wartość $\neq 0$. Pokazać, że liczba θ, $0<\theta<1$, występująca we wzorze Taylora

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

ma przy $x\to 0$ granicę równą $\frac{1}{n+1}$.

9* Funkcja $f(x)$ jest klasy C^∞ na R i spełnia dwa warunki:

1° Istnieje liczba L, $L>0$, że $|f^{(n)}(x)| \leq L$ dla każdego $x \in R$ i każdego naturalnego n;

2° $f(\frac{1}{n}) = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Pokazać, że $f(x) \equiv 0$ na R.

10* Funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na $\langle 0,1 \rangle$, $f(0) = f(1) = 0$ i $\min\limits_{\langle 0,1 \rangle} f(x) = -1$. Pokazać, że $\max\limits_{\langle 0,1 \rangle} f''(x) \geq 8$.

11. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji w zaznaczonych zbiorach:

a) $f(x) = |3x - x^3|$ na odcinku $\langle -2, 2 \rangle$;

b) $f(x) = \arcsin\sqrt{2x - x^2}$ w dziedzinie określoności

c) $f(x) = x + 4\ln(\sqrt{3+x^2} - |x|)$ na odcinku $\langle -1, 1 \rangle$.

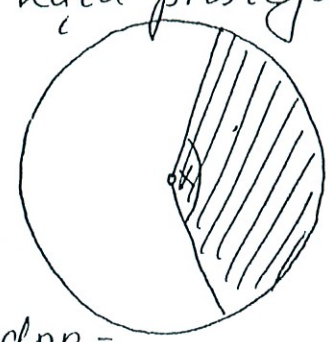
12. Wyznaczyć kresy (dolny i górny) podanych funkcji w zaznaczonych zbiorach i naszkicować wykresy tych funkcji:

a) $f(x) = (2 + 2x + x^2)e^{-x}$ w zbiorze $\langle 0, \infty)$;

b) $g(x) = \operatorname{arctg}(x + \frac{1}{x})$ w zbiorze $(0, \infty)$.

13. Punkt C leży pomiędzy prostymi równoległymi p i q, w odległości a od prostej p i w odległości b od prostej q. Jak wybrać punkt A na prostej p i punkt B na prostej q, aby trójkąt ABC był prostokątny i miał najmniejsze pole? Uwaga! Każdy z punktów A, B, C może być wierzchołkiem kąta prostego.

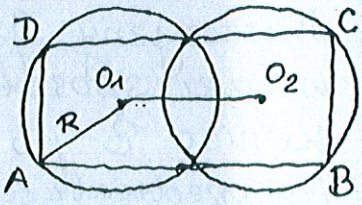
14. Z koła o promieniu R wycinamy wycinek (segment) i zwijamy z niego torebkę w kształcie stożka. Jak wybrać kąt x, aby otrzymana torebka miała największą objętość?



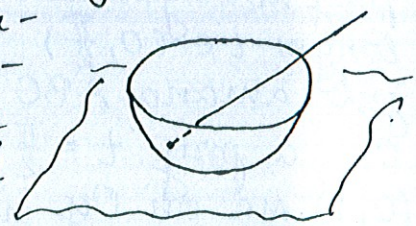
Uwaga! W zadaniach 13 i 14 należy ułożyć odpowiednią funkcję, ustalić dziedzinę tej funkcji i znaleźć odpowiednie ekstremum w tej dziedzinie.

Analiza matematyczna, Ir. matem. WPPT
Lista zadań nr 13.

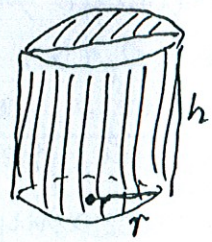
1. W jakiej odległości należy umieścić środki dwóch kół o tym samym promieniu R, aby pole prostokąta ABCD pokrytego przez te koła było największe?



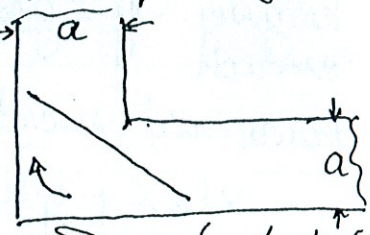
2. Do kotła w kształcie półsfery o promieniu R włożono mieszadełko – jednorodny pręt o długości 3R. Określić położenie równowagi pręta zakładając, że kocioł jest pusty i przyjmując, że nie ma tarcia. Pręt będzie w równowadze, gdy jego środek ciężkości będzie miał najniższe położenie.



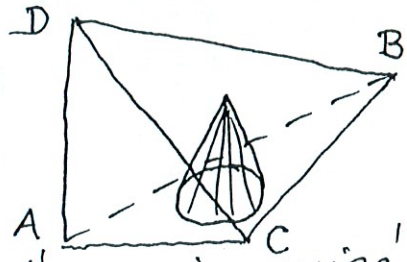
3. Metalowy pojemnik na odpadki, wykonany z blachy, ma mieć kształt walca, w którym górna płaszczyzna jest do połowy zakryta i wykonana jest z tej samej blachy. Pojemnik ma mieć objętość $V = \pi \cdot 2592\ cm^3$. Jak dobrać wymiary pojemnika, aby do jego budowy zużyć jak najmniej blachy?



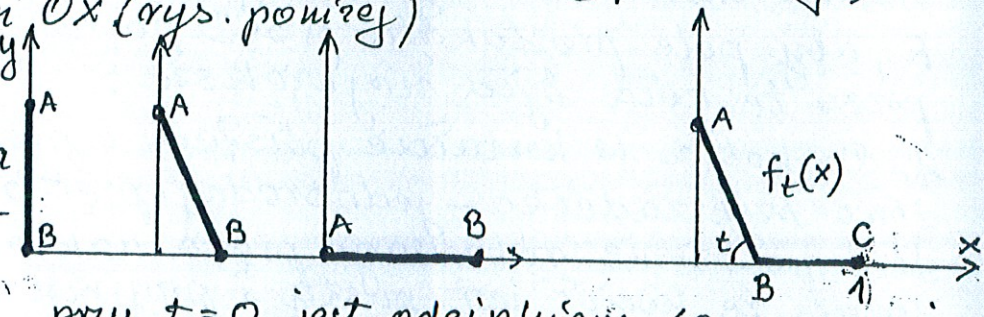
4. Kanał o szerokości a skręca pod kątem prostym.
α) Jaką najdłuższą belkę można przetransportować takim kanałem? Przyjmujemy, że belka jest odcinkiem.
β) Jakie największe pole może mieć prostokątna tratwa, która może przepłynąć takim kanałem? Stosunek długości tratwy do jej szerokości ma być równy co najmniej $\sqrt{3}$.



5. Tekturowe pudełko czworościenne ma w podstawie trójkąt prostokątny ABC, w którym $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, a przyprostokątna AC ma długość 9 cm. Rzut prostokątny wierzchołka D na płaszczyznę podstawy pokrywa się z wierzchołkiem A podstawy, a krawędź AD ma długość 8 cm. W pudełku umieszczono stożek w pozycji stojącej. Jaką największą objętość może mieć ten stożek?



6. Odcinek AB długości 1 zsuwa się w pierwszej ćwiartce płaszczyzny Oxy od położenia pionowego do poziomego w taki sposób, że koniec A porusza się po osi Oy, a koniec B – po osi Ox (rys. poniżej)



Na przedziale $\langle 0,1\rangle$ określona jest funkcja $f_t(x)$, która przy każdym ustalonym $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ jest łamaną ABC, przy $t=0$ jest odcinkiem $\langle 0,1\rangle$ na osi Ox, a przy $t=\frac{\pi}{2}$ wykres tej funkcji składa się z punktu $(0,1)$ na osi Oy i odcinka $\langle 0,1\rangle$ na osi Ox. Podać wzór algebraiczny, którym, przy każdym ustalonym t, można obliczyć wartość funkcji $f_t(x)$ w każdym punkcie $x \in \langle 0,1\rangle$. Funkcje $f_t(x)$ tworzą nieskończoną rodzinę funkcji ponumerowanych parametrem t przebiegającym przedział $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dla każdego x, $x \in \langle 0,1\rangle$, oznaczamy przez $g(x) = \max\limits_{0 \le t \le \frac{\pi}{2}} f_t(x)$. Znaleźć $g(x)$ i naszkicować wykres tej funkcji. Wyjaśnić rolę jaką dla krzywej $y=g(x)$ pełnią odcinki AB w różnych położeniach.

7. Udowodnić nierówność

$$x\ln x + y\ln y \geq (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, \quad x>0,\ y>0,$$

i podać interpretację geometryczną tej nierówności.

8. Funkcja $f(x)$ jest wypukła na półprostej $x \geq 0$, $f(0)=-1$, $f'(0)=1$. Czy dla każdego $k \geq -1$ równanie $f(x)=k$ ma rozwiązanie w zbiorze $\{x : x \geq 0\}$? Jeśli tak, to ile ma rozwiązań?

9. Zbadać funkcje i naszkicować wykresy tych funkcji.

$y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $y = e^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$; $y = \frac{1}{x\log_{|x|}e}$;

$y = \begin{cases} (x+1)(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} + \operatorname{arctg} x, & \text{dla } x \neq -1, \\ 0, & \text{dla } x=-1. \end{cases}$; $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

10. Naszkicować krzywe dane równaniami:

a) $y^2 = x^2(1+x)^2(1-x)$; b) $y^2 = (1-x^2)^3$; c) $x^2y^2 = (x-1)(x-2)$.

Przykład zestawu zadań (granice i ciągłość f. rach różn.)

1. Obliczyć granicę: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$. $\boxed{3\text{ pkt}}$

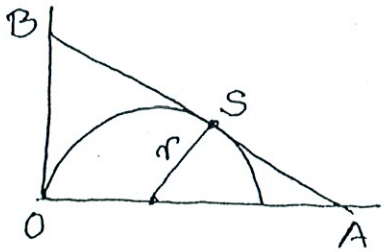
2. Funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła na przedziale $\langle -1,1\rangle$ i dla każdego $x\neq 0$ wartość funkcji $f(x)$ wyraża się wzorem: $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt[3]{1-\cos 2\pi x^2}$. $\boxed{3\text{ pkt}}$
Obliczyć $f(0)$ i sprawdzić czy istnieją pochodne $f'(0)$ i $f'(1)$.

3. Dana jest połowa paraboli $y=x^2$, $x\geq 0$. Rozważamy wszystkie proste $y=mx$, $m\in R$, i znajdujemy funkcję $\varphi(m)=\sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle}|x^2-mx|$. Podać algebraiczny wzór określający φ, naszkicować wykres tej funkcji i wyznaczyć najmniejszą wartość φ. $\boxed{3\text{ pkt.}}$

4. Funkcję $f(x)=3x-(4-\cos x)\sin x$ przybliżyć wielomianem 5-go stopnia i oszacować błąd na przedziale $\langle -\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\rangle$. $\boxed{3\text{ pkt}}$

5. Udowodnić, że dla $x>1$ prawdziwa jest nierówność
$$e^x > 1+\ln(1+x+x^2).$$ $\boxed{5\text{ pkt}}$

6. Na poziomym ramieniu kąta prostego umieszczono połowę koła o promieniu r, do którego poprowadzono styczną w takim punkcie S, aby pole trójkąta OAB było najmniejsze. Podać pole tego trójkąta. $\boxed{5\text{ pkt}}$



7. Funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na R i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Pokazać, że istnieje taki punkt c, $c\in R$, że $f''(c)=0$. $\boxed{6\text{ pkt}}$

8. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna na $\langle 0,1\rangle$, $|f'(x)|=|f(x)|$ dla $x\in\langle 0,1\rangle$ i $f(0)=0$. Pokazać, że $f(x)\equiv 0$ na $\langle 0,1\rangle$. $\boxed{6\text{ pkt}}$

<u>Minimum</u>. Trzeba rozwiązać 3 zadania, w tym jedno z grupy $\{5,6\}$.

Ciągi i szeregi funkcyjne.

1. Wyznaczyć dziedziny zbieżności punktowej i funkcje graniczne ciągów funkcyjnych

a) $f_n(x) = x^n(1-x)$; b) $f_n(x) = n x^n(1-x)$; c) $f_n(x) = nxe^{-nx}$;

d) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$; e) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$.

Sprawdzić czy na tych zbiorach zbieżność jest jednostajna? Jeśli nie, to wyznaczyć zbiory, na których odpowiednie ciągi będą jednostajnie zbieżne.

2. Wyznaczyć dziedziny zbieżności punktowej szeregów funkcyjnych

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right); \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx};$$

3. Zbadać zbieżność jednostajną szeregów na podanych zbiorach

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\ln n}{1+n^4\cdot x^2}; \quad x\in R; \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}; \quad 0\le x<\infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}, \quad 0\le x<\infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\operatorname{arctg}(x^2+n^2); \quad |x|\le 1.$$

Czy szeregi te są zbieżne bezwzględnie?

4. Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną na przedziale (a,b). Pokazać, że ciąg $f_n(x) = \frac{1}{n}[n f(x)]$ jest na (a,b) zbieżny jednostajnie do $f(x)$.

5. $|f_n(x)| \le M$ dla $x\in E$ i $g_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$. Pokazać, że $f_n(x)g_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

6. Pokazać, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ jest określona i ciągła na zbiorze $R\setminus N$. Czy jest tam różniczkowalna?

Przykłady trudniejszych zadań z analizy!

1* Funkcja $f(x)$ jest określona na półprostej $\langle 0,\infty)$ i jest tam jednostajnie ciągła. Wiadomo, że dla każdego $x \in \langle 0,\infty)$ $\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$, $n \in N$. Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $u_0 = x$ i $u_{n+1} = \sin u_n$. Pokazać, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, u_n = \sqrt{3}$.

3* Niech E będzie przeliczalnym podzbiorem R, $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dla $x \in R$ określamy funkcję

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - x_n|}{2^n}.$$

Pokazać, że f jest funkcją ciągłą na R, ma skończoną pochodną $f'(x)$ w każdym punkcie $x \in R \setminus E$ i nie ma pochodnej w punktach zbioru E. Podać wzór na $f'(x)$, $x \in R \setminus E$

4. Funkcja $f: \langle 0,\infty) \to R$ jest nierosnąca, a funkcja $g(x) = x + f(x)$ jest niemalejąca na $\langle 0,\infty)$. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła na $\langle 0,\infty)$.

5* Funkcja $f(x)$ jest ciągła na $\langle a,b\rangle$ i różniczkowalna na (a,b). Pokazać, że istnieją dwa punkty $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 < \xi_2$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{2}\left[f'(\xi_1) + f'(\xi_2)\right]$$

6* Funkcja $f: \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ jest różniczkowalna na $\langle 0,1\rangle$, $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Pokazać, że istnieją liczby $\xi, \eta \in (0,1)$, $\xi \neq \eta$, że $f'(\xi)\cdot f'(\eta) = 1$.

7. Funkcja $f(x)$ jest klasy C^2 na półprostej $\langle 0,\infty)$, $f(0) = 0$ i $f'(x) \geq -f(x)$ dla $x \geq 0$. Udowodnić, że $f(x) \geq 0$ dla $x \geq 0$.

7** Funkcja $f(x)$ jest klasy C^2 na półprostej $\langle 0,\infty)$ i $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=B$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$.

Czy z warunku $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-f'(x))=B$ musi wynikać warunek $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$?

8. Ciąg u_n określony jest warunkami: $u_1=1$ i $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{1}{u_n}$. Czy ten ciąg jest zbieżny? Jeśli tak, to znaleźć jego granicę.

9. Funkcje $f_n(x)$ są nieujemne na $\langle a,b\rangle$ i nierosnące, ciągłe w punkcie $x=a$ i szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ jest zbieżny. Pokazać, że

1° szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $\langle a,b\rangle$ i

2° określa funkcję ciągłą w punkcie $x=a$.

10. Podać przykład szeregu zbieżnego jednostajnie na $\langle 0,1\rangle$, który po zmianie porządku przestaje być jednostajnie zbieżnym.

11. Podać przykład szeregu funkcyjnego zbieżnego na przedziale $\langle 0,1\rangle$, który nie jest jednostajnie zbieżny na żadnym podprzedziale przedziału $\langle 0,1\rangle$.

11*. Udowodnić, że

$$\lim\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\dots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=\frac{1}{2}.$$

12** Udowodnić, że dla każdego rosnącego ciągu $\{r_n\}$ złożonego z liczb naturalnych r_n, $r_1<r_2<r_3<\dots$, istnieje liczba rzeczywista $\gamma>1$ taka, że ciągi $\{r_n\}$ i $\{[\gamma^n]\}$ mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.