**Analiza matematyczna 1 — egzamin**

imię i nazwisko, numer indeksu

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

(1) Podaj definicję pochodnej funkcji $f$ w punkcie 7 (tj. wzór na $f'(7)$). (1 p.)

$f'(7) = \lim_{x\to 7} \frac{f(x)-f(7)}{x-7}$.

(2) Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym. (1 p.)

*Ciągi monotoniczne i ograniczone są zbieżne.*

(3) Wiadomo, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wyraź $\int_1^{-1} f(x)dx$ przy pomocy funkcji $F$. (1 p.)

$\int_1^{-1} f(x)dx = F(-1) - F(1)$.

(4) Podaj definicję (Heinego lub Cauchy'ego) granicy prawostronnej funkcji $f$ w punkcie 0. (2 p.)

*Granica ta wynosi $a$, tj. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że z warunku $0 < x < \delta$ wynika warunek $|f(x) - a| < \varepsilon$.*

*Równoważnie: dla każdego zbieżnego do 0 ciągu $(x_n)$ o wyrazach dodatnich zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.*

(5) Sformułuj twierdzenie wykorzystane w następującym rozumowaniu: (2 p.)

„Funkcja $f(x) = x^x - x^{2/x}$ jest ciągła, $f(1) = 0$ oraz $f(2) = 2$, zatem równanie $f(x) = 1$ ma rozwiązanie w przedziale $(1, 2)$."

*Funkcja ciągła na przedziale domkniętym ma własność Darboux; tj. jeśli $f$ jest ciągła na $[a, b]$, to przyjmuje w $(a, b)$ wszystkie wartości zawarte pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$.*

(6) Podaj definicję funkcji $\arccos(x)$. (2 p.)

*Równość $\arccos(x) = y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos(y) = x$ oraz $y \in [0, \pi]$.*

Część rachunkowa

(7) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$. (3 p.)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n((n^2+1)-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 1.$$

(8) Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = (2x^2+x-1)e^{-x}$. (3 p.)

*Funkcja $f$ jest określona i różniczkowalna na $\mathbb{R}$. Zachodzi $f'(x) = (4x+1)e^{-x} + (2x^2+x-1)(-e^{-x}) = -(2x^2-3x-2)e^{-x}$. Pierwiastkami trójmianu kwadratowego $2x^2-3x-2$ są $x=2$ oraz $x=-\frac{1}{2}$, zatem $f'(x) = -(x-2)(x+\frac{1}{2})$, czyli $f'(x)>0$ dla $x\in(-\frac{1}{2},2)$ oraz $f'(x)<0$ dla $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,\infty)$. Oznacza to, że $f$ jest rosnąca na $[-\frac{1}{2},2]$ i malejąca na $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ oraz na $[2,\infty)$; $f$ ma minimum w punkcie $x=-\frac{1}{2}$ i maksimum w punkcie $x=2$.*

(9) Wyznacz wszystkie styczne do wykresu funkcji $f(x)=x^2$, które przechodzą przez punkt $(2,3)$. (3 p.)

*Równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0,x_0^3)$ to $y-x_0^2 = 2x_0(x-x_0)$, czyli $y = 2x_0x - x_0^2$. Wstawiając $x=2$ i $y=3$, otrzymujemy $3 = 4x_0 - x_0^2$, czyli $x_0^2 - 4x_0^2 + 3 = 0$. Stąd łatwo $x_0=1$ lub $x_0=3$, a szukanymi stycznymi są $y=2x-1$ oraz $y=6x-9$.*

(10) Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. (3 p.)

*Na mocy reguły de l'Hospitala:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln(x)+x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-0}{\ln(x)+\frac{x}{x}+1-0}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(11) Oblicz całkę $\displaystyle\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx$. (4 p.)

*Podstawiamy* $\ln(x)=y$, $x=e^y$, $dx=e^y dy$*:*

$$\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx=\int\frac{\ln(y)}{e^y}\,e^y dy=\int\ln(y)dy,$$

*a następnie całkujemy przez części:*

$$\begin{aligned}\int\ln(y)dy &= \int y'\ln(y)dy\\ &= y\ln(y)dy-\int y(\ln(y))'dy\\ &= y\ln(y)-\int 1dy\\ &= y\ln(y)-y+C=\ln(x)\ln(\ln(x))-\ln(x)+C.\end{aligned}$$

(12) Oblicz całkę $\displaystyle\int\frac{\cos(x)}{2-(\cos(x))^2}\,dx$. (3 p.)

*Podstawiamy* $\sin(x)=y$, $\cos(x)dx=dy$*:*

$$\int\frac{\cos(x)}{2-(\cos(x))^2}\,dx=\int\frac{1}{2-(1-y^2)}\,dy=\int\frac{1}{1+y^2}\,dy=\operatorname{arctg}(y)+C=\operatorname{arctg}(\sin(x))+C.$$

Część problemowa

(13) Ciąg $(a_n)$ spełnia równania $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$. Uzasadnij zbieżność ciągu $(a_n)$ i wyznacz jego granicę. (4 p.)

*(Ciąg ten ma przy wyrazy nieujemne i jest poprawnie określony: $a_1 \geq 0$, a jeśli $a_n \geq 0$, to $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \geq 0$, zatem na mocy zasady indukcji matematycznej $a_n \geq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$).*

*Ciąg ten jest rosnący: $a_2 = 2 > 1 = a_1$ oraz jeśli $a_{n+1} > a_n$, to $a_{n+2} = 2\sqrt{a_{n+1}} > 2\sqrt{a_n} = a_{n+1}$, zatem na mocy zasady indukcji matematycznej $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

*Ciąg ten jest też ograniczony z góry: $a_1 < 7$ i jeśli $a_n < 7$, to $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} < 2\sqrt{7} < 7$, a więc $a_n < 7$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ na mocy zasady indukcji matematycznej.*

*Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym, ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do pewnej granicy $x$.*

*Granica ta spełnia $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (2\sqrt{a_n}) = 2\sqrt{x}$, skąd $x = 0$ lub $x = 2$. Pierwsza możliwość jest wykluczona, bo $x \geq a_1 = 1$; zatem granicą ciągu $(a_n)$ jest 2.*

(14) Niech $A = \left\{ \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a^2+b^2} : a, b \in \mathbb{N} \right\}$. Udowodnij, że $\sup A = 1$ oraz $\inf A = 0$. (4 p.)

*Oczywiście $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a^2+b^2} \geq 0$, więc $\inf A \geq 0$. Ponadto biorąc $a = 1$ i $b = n$, otrzymujemy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{1+n} + \frac{n}{1+n^2} \to 0$, skąd $\inf A \leq 0$ i wobec tego $\inf A = 0$.*

*Przyjmując $a = b = 1$, otrzymujemy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, zatem $\sup A \geq 1$. Ponadto $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a^2+b^2} = 1 - \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a^2+b^2} = 1 - b(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a^2+b^2}) \leq 1$ (bowiem $a^2 + b^2 \geq a + b$), przez co $\sup A \leq 1$ i ostatecznie $\sup A = 1$.*