Analiza matematyczna — I kolokwium, zestaw A

1. Wykaż, że kresem górnym zbioru

$$\left\{\frac{nm}{n^2+m^2+1} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

jest liczba $\frac{1}{2}$. Sformułuj wykorzystaną definicję kresu górnego lub wykorzystane twierdzenie o wyznaczaniu kresu górnego.

Rozwiązanie: Zachodzi

$$\frac{1}{2} - \frac{nm}{n^2+m^2+1} = \frac{n^2+m^2+1-2nm}{2(n^2+m^2+1)} = \frac{(n-m)^2+1}{2(n^2+m^2+1)} > 0$$

dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$, zatem $\frac{1}{2}$ jest ograniczeniem z góry rozważanego zbioru. Z drugiej strony, gdy $\varepsilon > 0$ oraz $n = m > 1/\varepsilon$, to

$$\frac{nm}{n^2+m^2+1} = \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n^2+1)} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

zatem $\frac{1}{2} - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem z góry rozważanego zbioru. Oznacza to, że $\frac{1}{2}$ jest najmniejszym ograniczeniem z góry rozważanego zbioru, a więc jego kresem górnym.

(Inny wariant drugiej części: liczby $a_n = n^2/(2n^2+1)$ są elementami tego zbioru i ciąg (a_n) jest zbieżny do $\frac{1}{2}$, więc na mocy odpowiedniego twierdzenia kresem górnym rozważanego zbioru jest $\frac{1}{2}$).

2. Wykorzystując równość $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ i własności granic ciągów, oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Rozwiązanie: Zachodzi:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right) = e\cdot e\cdot 1 = e^2.\end{aligned}$$

(Możliwe są oczywiście inne uzasadnienia).

3. Spełniony jest warunek

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2} - \frac{1}{a_n} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Oblicz możliwe wartości granicy ciągu (a_n), jeśli wiadomo, że jest on zbieżny. Następnie wyznacz granicę ciągu (a_n), jeśli dodatkowo wiadomo, że $a_1 = 4$.

Rozwiązanie: Jeśli jest zbieżny do x, to $x = \frac{x+3}{2} - \frac{1}{x}$, skąd łatwo $x = 1$ lub $x = 2$ — są to dwie możliwe wartości granicy. Gdy dodatkowo $a_1 = 4$, to wykażemy indukcyjnie, że (a_n) jest malejący i ograniczony z dołu przez 2. Oczywiście $a_1 \geqslant 2$, zaś jeśli $a_n \geqslant 2$, to $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2} - \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{2+3}{2} - \frac{1}{2} = 2$. Ponadto $a_2 = \frac{4+3}{2} - \frac{1}{4} < 4 = a_1$, zaś jeśli $a_n < a_{n-1}$, to $\frac{a_n+3}{2} - \frac{1}{a_n} < \frac{a_{n-1}+3}{2} - \frac{1}{a_{n-1}}$ (bo $a_n, a_{n-1} > 0$), zatem $a_{n+1} < a_n$. Pozostaje wykorzystać twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym oraz pierwszą część zadania: granicą jest 2 (wartość 1 wykluczamy, ponieważ ciąg jest ograniczony z dołu przez 2).

4. Dany jest rosnący i nieograniczony ciąg dodatnich liczb rzeczywistych (a_n). Ciąg (x_n) określony jest wzorami

$$x_1 = 1,$$
$$x_{n+1} = \frac{a_n}{x_n} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Wykaż, że (x_n) nie jest zbieżny do właściwej granicy.
(b) Wykaż, że ciągi (x_{2n-1}) oraz (x_{2n}) są rosnące.
(c) Udowodnij, że ciąg (x_n) nie musi być rozbieżny do nieskończoności (wskazując odpowiedni przykład ciągu (a_n)).

Rozwiązanie: (a) Gdyby ciąg (x_n) był zbieżny do liczby x, to skoro $x_{n+1}x_n = a_n$, ciąg (a_n) musiałby być zbieżny do x^2. Jest to niemożliwe, bo (a_n) jest nieograniczony.

(b) Zachodzi $x_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} x_{2n-1}$, a skoro $a_{2n} \geqslant a_{2n-1}$, zachodzi $x_{2n+1} \geqslant x_{2n-1}$ (bowiem wyrazy ciągu (x_n) są dodatnie, co łatwo wykazać indukcyjnie). Podobnie $x_{2n+2} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} x_{2n} \geqslant x_{2n}$.

(c) Dowolny ciąg (a_n) o własności $a_{2n} = a_{2n-1}$ jest odpowiedni: wtedy $x_{2n+1} = x_{2n-1}$, zatem (x_{2n-1}) jest ciągiem stale równym 1. Oznacza to, że (x_n) nie jest rozbieżny do nieskończoności. (Jeśli potrzebny jest więc konkretny przykład ciągu (a_n), można przyjąć $a_n = 2n - (-1)^n$).