1. $x = t^6$, $t = \sqrt[6]{x}$ $(x>0)$; $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x^2} = t^4$

$t \to 1 \Leftrightarrow x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3 - t^2}{t^4 - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2(t-1)}{(t^3+t^2+t+1)(t-1)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2}{t^3+t^2+t+1} = \frac{1}{4}$$

Formalnie: $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $g(t) = \frac{t^3 - t^2}{t^4 - 1}$, $g(f(x)) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$, f – elementarna, więc ciągła w $x=1$, zatem $\lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{t\to f(1)} g(t)$.

<u>Tw.</u> Jeśli f – ciągła w a, $\lim_{t\to f(a)} g(t) = b$, to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = b$

(przy założeniu, że a jest punktem skupienia dziedziny $g\circ f$). ← (warunek ten można zostawić w domyśle)

2. Dziedzina f to $\{x : e^x - e\cdot x \neq 0\}$; skoro $e^x > e\cdot x$ dla $x \neq 1$ oraz $e^x = e\cdot x$ dla $x=1$, dziedziną jest $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Zachodzi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\cdot e^x}{e^x - e\cdot x} = \infty,$$ bo licznik dąży do $1\cdot e > 0$, mianownik zaś jest dodatni i dąży do zera (granica typu $\frac{[e]}{[0^+]} = [\infty]$),

a więc $x=1$ jest obustronną asymptotą pionową. Podobnie:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\cdot e^x}{e^x - e\cdot x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x}{x} - e} = \frac{0}{0-e} = 0,$$

czyli $y=0$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$. Wreszcie

(podano na tablicy, można użyć bez uzasadnienia)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{x\,e^x}{e^x - e\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - e\cdot\frac{x}{e^x}} = \frac{1}{1 - e\cdot 0} = 1,$$

bo $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, a więc $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ (granica typu $\frac{[1]}{[\infty]} = [0^+]$)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x\,e^x}{e^x - e\cdot x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,e^x - x(e^x - e\cdot x)}{e^x - e\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e\cdot x^2}{e^x - e\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e}{\frac{(e^{x/2})^2}{x^2} - \frac{e}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e}{4\left(\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2 - \frac{e}{x}} = 0,$$

bo $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}}{x/2} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} = \infty$ $(y = \frac{x}{2})$; $[\infty]^2 = [\infty]$, $[\infty] - [0] = [\infty]$, $\frac{[1]}{[\infty]} = [0^+]$

(ewentualnie można użyć wyniku z ćwiczeń: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, ale należy wtedy zamieścić stosowny komentarz)

więc $y = x$ jest asymptotą ukośną w ∞.

<u>Odp.</u> Funkcja f ma trzy asymptoty: pionową $x=2$ (obustronną), poziomą $y=0$ (w $-\infty$) i ukośną $y=x$ (w ∞).

3. Z definicji:

$\arcsin x = y \iff x = \sin y$; $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; tu siłą rzeczy $x \in [-1,1]$;

zatem: $\sin(\arcsin x) = \sin y = x$,

$(\cos(\arcsin x))^2 = 1 - (\sin(\arcsin x))^2 = 1 - x^2$,

$\cos(\arcsin x) = \cos y \geq 0$ (bo $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$),

skąd: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$,

$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

dla dowolnych $x \in [-1,1]$

W ostatnim wzorze: $1 - x^2 > 0$, tzn. $x \in (-1,1)$ po prawej stronie; po lewej zaś: $x \in [-1,1]$ (dziedzina arcsin) oraz $\arcsin x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ dla $n \in \mathbb{Z}$ (dziedzina tg), skąd łatwo $x \in (-1,1)$ (bo $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\arcsin x = \pm\frac{\pi}{2} \iff x = \pm 1$).

Zatem wzór zachodzi dla $x \in (-1,1)$.

(oczywiście wystarczy badać lewą stronę)

4. Z def.:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbb{R}} \; x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad \text{(Cauchy)}$$

SPOSÓB I:

Wiemy, że równoważnie:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \iff$ z warunku: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n > a$ dla $n \in \mathbb{N}$ wynika: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ (Heine),

co jest warunkiem mocniejszym od tego podanego w zadaniu. Zatem istnienie granicy $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ implikuje warunek z zadania. Jeśli zaś warunek z definicji Heinego nie jest spełniony, to istnieje ciąg (x_n) taki, że $x_n > a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$ (lub $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nie istnieje). Wtedy dla pewnego $\varepsilon > 0$ zachodzi: $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n. Niech (k_n) będzie rosnącym ciągiem tych właśnie wartości n i niech $(x_{k_{l_n}})$ będzie monotonicznym podciągiem ciągu (x_{k_n}). Wtedy $x_{k_{l_n}} > a$ i $\lim_{n\to\infty} x_{k_{l_n}} = a$, więc $(x_{k_{l_n}})$ jest malejący i ma w takim razie podciąg ściśle malejący $(x_{k_{l_{m_n}}})$ – zbieżny do a i taki, że $|f(x_{k_{l_{m_n}}}) - b| \geq \varepsilon$, czyli $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_{l_{m_n}}}) \neq b$, wbrew warunkowi z zadania. To dowodzi równoważności tych warunków.

SPOSÓB II

Pierwsza część – jak poprzednio. Jeśli nie jest spełniony warunek z def. Cauchy'ego, to dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in (a, a+\delta)$ zachodzi $|f(x) - b| < \varepsilon$. Wybierzmy $x_0 > a$ dowolnie, a gdy określone są już $x_0, x_1, \ldots, x_n$, to niech x_{n+1} będzie punktem z (a, x_n) $(a, a+\frac{1}{n})$ takim, że $|f(x_{n+1}) - b| \geq \varepsilon$ (rozważamy więc $\delta = \min(x_n - a, \frac{1}{n})$). Wtedy (x_n) jest ściśle malejący i $a < x_n < a + \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ dla $n \geq 1$, więc $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$ (lub granica ta nie istnieje). Oznacza to, że nie jest spełniony warunek z zadania.