Lista zadań nr 10: Funkcje rozmaite

(1) Udowodnij, że $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ oraz

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$
$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y).$$

(2) Wyprowadź wzór na $\operatorname{tgh}(x+y)$.

(3) Funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych to *funkcje polowe*: arsinh, arcosh i artgh (*area sinus hiperboliczny* itp.) są funkcjami odwrotnymi odpowiednio do sinh, cosh (na $[0,\infty)$) i tgh, tj.

$$\begin{array}{rll} \operatorname{arcosh}(x) = t & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \cosh(t) = x \text{ oraz } t \in [0,\infty); \\ \operatorname{arsinh}(y) = t & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \sinh(t) = y; \\ \operatorname{artgh}(z) = t & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \operatorname{tgh}(t) = z. \end{array}$$

Wyznacz dziedziny funkcji polowych i wyraź je przy pomocy logarytmu naturalnego.

(4) Udowodnij, że funkcja f dana wzorem $f(x) = 1$ dla $x > 0$ oraz $f(x) = -1$ dla $x < 0$ jest elementarna. Czy funkcja sign jest elementarna?

(5) Udowodnij, że funkcja f dana wzorem $f(x) = x$ dla $x \leqslant 0$ oraz $f(x) = x\sqrt{x}$ dla $x > 0$ jest elementarna.

(6) Jaką geometryczną własność wykresu funkcji rzeczywistej f określonej na zbiorze $\mathbb{R}$ opisuje warunek $(f \circ f)(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$? Czy wszystkie funkcje o tej własności są monotoniczne?

(7) Czy istnieje funkcja rzeczywista f określona na zbiorze $\mathbb{R}$ o własności $f(f(x)) = -x$ dla $x \in \mathbb{R}$?

Niech f będzie funkcją rzeczywistą, określoną na zbiorze liczb rzeczywistych. Niech G_f oznacza zbiór okresów *funkcji f, czyli*

$$G_f = \{T \in \mathbb{R} : f(x) = f(x+T) \text{ dla wszystkich } x \in \mathbb{R}\}.$$

Funkcja f jest zatem okresowa, jeśli $G_f \neq \{0\}$. Jeśli f jest okresowa, niech

$$\tau_f = \inf(G_f \cap (0,\infty)).$$

Gdy $\tau_f > 0$, wielkość τ_f nazywana jest okresem podstawowym *funkcji f.*

(8) Wykaż, że $0 \in G$ oraz jeśli $T, S \in G_f$, to $T+S, T-S \in G_f$, tzn. G_f jest *podgrupą* grupy $\mathbb{R}$ z działaniem dodawania.

(9) Udowodnij, że jeśli $G \subseteq \mathbb{R}$ jest podgrupą $\mathbb{R}$, to $G = G_f$ dla pewnej funkcji f.

(10) Podaj przykład funkcji okresowej f, która nie jest funkcją stałą, dla której $\tau_f = 0$.

(11) Udowodnij, że jeśli $\tau_f > 0$, to τ_f jest okresem funkcji f.

(12) Udowodnij, że jeśli f jest okresowa, ciągła w 0 oraz $\tau_f = 0$, to f jest stała.

(13) Niech f i g będą funkcjami okresowymi o okresach podstawowych τ_f i τ_g. Udowodnij, że jeśli τ_f/τ_g jest różną od 1 liczbą wymierną, to najmniejsza wspólna wielokrotność τ liczb τ_f i τ_g jest okresem $f+g$, lecz nie musi być jej okresem podstawowym (tj. możliwa jest nierówność $\tau_{f+g} < \tau$).

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Czy suma funkcji okresowych jest okresowa? A iloczyn? A złożenie?

(ii) Utwórz wszystkie prawdziwe zdania zgodne z szablonem:

$$\text{„złożenie funkcji} \begin{Bmatrix} \text{rosnącej} \\ \text{malejącej} \end{Bmatrix} \text{ z funkcją } \begin{Bmatrix} \text{rosnącą} \\ \text{malejącą} \end{Bmatrix} \text{ jest funkcją } \begin{Bmatrix} \text{rosnącą} \\ \text{malejącą} \end{Bmatrix}\text{”}.$$

(iii) Utwórz wszystkie prawdziwe zdania zgodne z szablonem:

$$\text{„} \begin{Bmatrix} \text{suma} \\ \text{iloczyn} \\ \text{złożenie} \end{Bmatrix} \text{funkcji} \begin{Bmatrix} \text{parzystej} \\ \text{nieparzystej} \end{Bmatrix}$$

$$\text{i funkcji} \begin{Bmatrix} \text{parzystej} \\ \text{nieparzystej} \end{Bmatrix} \text{ jest funkcją } \begin{Bmatrix} \text{parzystą} \\ \text{nieparzystą} \end{Bmatrix}\text{”}.$$

Zadania dodatkowe

(A) Skonstruuj dwie (nieciągłe) funkcje okresowe f i g takie, że $f(t) + g(t) = t$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wskazówka: potraktuj $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$ i wykorzystaj dowolną bazę Hamela tej przestrzeni (jest to więc zadanie z algebry liniowej, nie z analizy matematycznej).

(B) Udowodnij (indukcyjnie!), że funkcja wykładnicza exp nie jest sumą skończenie wielu funkcji okresowych.

(C) Niech f i g będą funkcjami okresowymi o okresach podstawowych τ_f i τ_g. Udowodnij, że jeśli τ_f/τ_g jest liczbą niewymierną oraz $f + g$ jest *ciągła*, to $f + g$ nie jest funkcją okresową.

(D) Wskaż przykład okresowych funkcji f i g o okresach podstawowych τ_f i τ_g, dla których τ_f/τ_g jest liczbą niewymierną, lecz $f + g$ jest okresowa.

(E) Udowodnij, że $f(t) = \lfloor t \rfloor$ jest granicą ciągu funkcji elementarnych.

Uwagi:

- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-xggg})$;
- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;
- $\operatorname{tgh}(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$.