Lista zadań nr 11: Granice funkcji

(1) Oblicz $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-x^2-8x+12}$.

(2) Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$.

(3) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ (gdzie $a, b \neq 0$).

(4) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}$ (gdzie $a, b \neq 0$).

(5) Oblicz $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{\cos(3x)}$.

(6) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x}$.

(7) Podstawiając $t = \arcsin(x)$, oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x}$.

(8) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(\sin(x))}{\sin(\mathrm{tg}(x))}$.

(9) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ctg}(\cos(x))}{\cos(\mathrm{ctg}(x))}$.

(10) Uzasadnij, że nie istnieją granice (właściwe lub nie)

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\lfloor x\rfloor), \qquad \lim_{x\to 0}\sin(\tfrac{1}{x}), \qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{x}.$$

(11) Udowodnij, że jeśli f jest monotoniczna i istnieje $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$, to istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(12) Oblicz $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{arctg}(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}(x)$.

(13) Udowodnij, że jeśli f jest okresowa i istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, to f jest stała.

(14) Udowodnij, że granica $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ dla dowolnego zbieżnego do a ciągu (x_n) o wyrazach w dziedzinie f i różnych od a (bez żadnego założenia o jednakowej wartości tych granic).

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}$.

(ii) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}(x))$.

(iii) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x}$ (gdzie $a \neq 0$).

Zadania dodatkowe

(A) Funkcje f i g są okresowe (o być może różnych okresach) oraz spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 0$. Udowodnij, że $f(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wskazówka: udowodnij wpierw, że funkcje f i g mają wspólny okres. W tym celu oznacz przez $T_f > 0$ i $T_g > 0$ pewne okresy funkcji f i g. Dla ustalonych liczb $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{Z}$ zachodzi $0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(f(x+nT_f+mT_g)-g(x+nT_f+mT_g)) = f(x+mT_g) - \lim\limits_{n\to+\infty} g(x+nT_f)$, zatem wartość $f(x+mT_g)$ nie zależy od $m \in \mathbb{Z}$.

(B) Stosując wzór $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4(\sin(x))^3$, udowodnij, że:

$$x - \sin(x) = \tfrac{4}{3}\big(3(\sin(\tfrac{x}{3}))^3 + 9(\sin(\tfrac{x}{9}))^3 + 27(\sin(\tfrac{x}{27}))^3 + \ldots\big)$$

Wykorzystaj ten wzór do wyznaczenia granicy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$.

(C) Na zbiorze $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ określamy funkcję f wzorem $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ gdy $x \in \mathbb{R}$ i dodatkowo $f(-\infty) = -1$, $f(\infty) = 1$. Udowodnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny do granicy (właściwej lub niewłaściwej) $a \in \mathbb{R}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(a)$. (Na kursie topologii dowiemy się, że wynik ten oznacza, że przestrzenie $\mathbb{R}^*$ oraz $[-1,1]$ są homeomorficzne).