Lista zadań nr 13: Funkcje ciągłe

(1) Udowodnij, że jeśli f jest ciągła w a oraz $f(a) > 0$, to istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x) > 0$ dla $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

(2) Udowodnij, że jeśli f_1 jest ciągła na $[a,b]$, f_2 jest ciągła na $[b,c]$ oraz $f_1(b) = f_2(b)$, to funkcja f dana wzorem $f(x) = f_1(x)$ gdy $x \in [a,b]$ oraz $f(x) = f_2(x)$ gdy $x \in [b,c]$ jest ciągła na $[a,c]$.

(3) Znajdź punkty nieciągłości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{gdy } x \neq 0, \\ 1 & \text{gdy } x = 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{gdy } x \neq 0, \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

i określ ich typ.

(4) Funkcja f ma w 0 nieciągłość typu skok, zaś funkcja g — nieciągłość istotną. Czy $f+g$ może być ciągła w 0? Czy $f \cdot g$ może być ciągła w 0?

(5) Udowodnij, że wykresy funkcji $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \cos(x)$ mają dokładnie 2 punkty wspólne.

(6) Udowodnij, że dla każdego $y \geqslant 1$ równanie $x^x = y$ ma rozwiązanie.

(7) Udowodnij, że (w ustalonej chwili) w pewnych dwóch przeciwległych punktach Ziemi jest ta sama temperatura. Wskazówka: poszukaj takich punktów na równiku. Uwaga: prawdziwe jest wręcz twierdzenie, że w pewnych dwóch przeciwległych punktach Ziemi jest ta sama temperatura oraz to samo ciśnienie.

(8) Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $\mathbb{R}$ oraz $f(f(a)) = a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $f(b) = b$ dla pewnego $b \in \mathbb{R}$. Czy założenie $f(f(a)) = a$ można zastąpić warunkiem $f(f(f(a))) = a$?

(9) Niech F będzie figurą na płaszczyźnie. Udowodnij, że istnieje prosta o zadanym kierunku, która dzieli figurę F na dwie części o jednakowym polu.

(10) Niech F będzie wypukłą figurą na płaszczyźnie. Uzasadnij (nieformalnie), że istnieje prosta, która dzieli figurę F na dwie części o jednakowym polu i jednakowym obwodzie.

(11) Podaj przykład funkcji ciągłej na przedziale $(0,1]$, która nie jest ograniczona ani z dołu, ani z góry.

(12) Podaj przykład funkcji ciągłej na przedziale $(0,1]$, która jest ograniczona, ale nie osiąga ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.

(13) Podaj przykład nieciągłej funkcji na przedziale $[0,1]$, która ma własność Darboux.

(14) Uzasadnij, że funkcja dana wzorem $f(x) = x^2$ jest ciągła na $\mathbb{R}$, ale nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Podaj przykład *ograniczonej* funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

(15) Podaj przykład funkcji ciągłej na $(0,1]$, która nie jest jednostajnie ciągła na $(0,1]$.

(16) Udowodnij, że jeśli f jest jednostajnie ciągła na przedziale skończonym (a,b), to istnieją granice $\lim\limits_{x \to a^+} f(s)$ oraz $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

(17) Udowodnij, że jeśli funkcja f jest monotoniczna na przedziale (a,b) i ma własność Darboux, to jest ciągła na (a,b).

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Udowodnij, że wielomian $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x + 1$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste.

(ii) Funkcja g jest ciągła na przedziale (a, b), zaś funkcja f jest określona co najmniej na przedziale (a, b) i spełnia równość $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$. Udowodnij, że funkcja f też jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a, b). Czy można zastąpić przedział (a, b) przedziałem $[a, b]$?

Zadania dodatkowe

(A) (*Metoda bisekcji*). Niech f będzie ciągłą funkcją na przedziale $[a_1, b_1]$. Przypuśćmy, że $f(a_1) \leqslant y \leqslant f(b_1)$ lub $f(b_1) \leqslant y \leqslant f(a_1)$. Określ ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ w taki sposób, aby $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ lub $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz tak, aby przedział $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ był lewą lub prawą połową przedziału $[a_n, b_n]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wykorzystaj tę konstrukcję do innego dowodu twierdzenia o własności Darboux funkcji ciągłych.

(B) Funkcja f jest ograniczona na $[0, +\infty)$. Funkcja dana wzorem $g(t) = \sup\{f(s) : s \in [0, t]\}$ dla $t \in [0, +\infty)$ jest monotoniczna, a więc ma jednostronne granice w każdym punkcie $t \in [0, +\infty)$ (zatem nie ma nieciągłości istotnych). Udowodnij, że jeśli f jest ciągła, to g też jest ciągła.

(C) Funkcja f określona na $\mathbb{R}$ jest monotoniczna i spełnia równanie $f(f(x)) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f jest ciągła.

(D) Udowodnij, że jeśli funkcja f spełnia na przedziale (a, b) warunek Höldera z wykładnikiem $a > 1$ (czyli $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant C|x_2 - x_1|^a$ dla pewnej stałej C i wszystkich $x_1, x_2 \in (a, b)$), to f jest stała na (a, b).

(E) Udowodnij, że zbiór punktów nieciągłości typu skok dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny. Wskazówka: udowodnij, że zbiór tych punktów t dla których f ma skok o wartości większej niż $\varepsilon > 0$ jest dyskretny.

(F) Zbiór A nazywany jest *zbiorem otwartym*, jeśli jest sumą (dowolnie wielu) przedziałów otwartych. Udowodnij, że każdy zbiór otwarty można zapisać jako przeliczalną (skończoną lub nie) sumę parami rozłącznych przedziałów otwartych.

(G) Zbiór A jest typu G_δ jeśli jest częścią wspólną *przeliczalnie wielu* zbiorów otwartych. Udowodnij, że $\{x\}$, $[a, b]$ oraz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ są zbiorami typu G_δ.

(H) Dla dowolnego zbioru A typu G_δ skonstruuj funkcję, której zbiorem punktów ciągłości jest A. Wskazówka: niech $g(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ oraz $g(x) = -1$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus Q$; jeśli A jest częścią wspólną zbiorów otwartych A_n, to rozważ funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{1}{n} g(x)$ gdy $x \in (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \setminus A_n$ oraz $f(x) = 0$ gdy $x \in A$.

(I) Udowodnij, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór liczb $x \in \mathbb{R}$ o własności:

$$\text{istnieje } \delta > 0 \text{ taka, że jeśli } |x_1 - x| < \delta \text{ i } |x_2 - x| < \delta, \text{ to } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

jest otwarty. Wywnioskuj, że zbiór punktów ciągłości dowolnej funkcji rzeczywistej określonej na $\mathbb{R}$ jest typu G_δ.

(J) Wiadomo, że f jest funkcją określoną na $\mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ funkcja dana wzorem $f(x) + f(x - a)$ jest ciągła. Udowodnij, f jest ciągła.

(K) Wiadomo, że f jest funkcją określoną na $\mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ funkcja dana wzorem $f(x) + f(a - x)$ jest ciągła. Udowodnij, że nie każda taka funkcja f musi być ciągła, ale jeśli f jest nieciągła, to jest też nieograniczona na każdym przedziale.

(L) Wiadomo, że f jest funkcją określoną na $\mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ funkcja dana wzorem $f(x) - f(a - x)$ jest ciągła. Czy f jest ciągła? (♠)

(M) Skonstruuj funkcję rzeczywistą f określoną na $\mathbb{R}$, która na każdym przedziale przyjmuje wszystkie możliwe wartości rzeczywiste. Zauważ, że funkcja ta ma własność Darboux! Wskazówka: prosty przykład takiej funkcji został podany przez Conwaya.

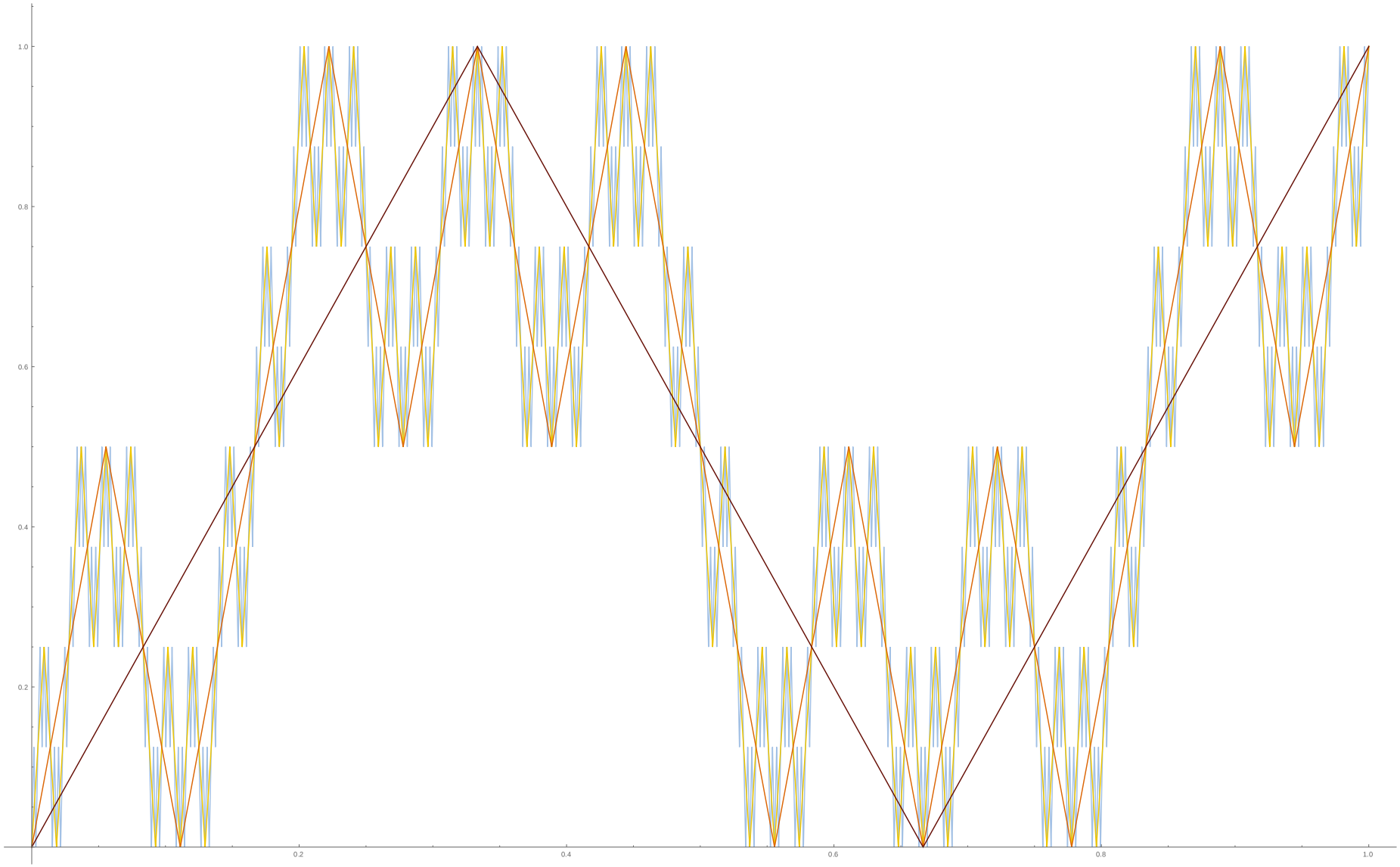
(N) Niech $t \in [0, 1]$ i niech t ma rozwinięcie szóstkowe $0{,}a_1a_2a_3\ldots$. Określmy $f(t)$ jako liczbę mającą rozwinięcie dwójkowe $0{,}b_1b_2b_3\ldots$, gdzie ciąg (b_n) jest określony wraz z ciągiem (c_n) następująco:

- jeśli $c_{n-1} = 0$, to: $b_n = 0$ gdy $a_n \in \{0, 3, 4\}$, zaś $b_n = 1$ gdy $a_n \in \{1, 2, 5\}$; $c_n = 0$ gdy $a_n \in \{0, 1, 4, 5\}$, zaś $c_n = 1$ gdy $a_n \in \{2, 3\}$;
- jeśli $c_{n-1} = 1$, to: $b_n = 1$ gdy $a_n \in \{0, 3, 4\}$, zaś $b_n = 0$ gdy $a_n \in \{1, 2, 5\}$; $c_n = 1$ gdy $a_n \in \{0, 1, 4, 5\}$, zaś $c_n = 0$ gdy $a_n \in \{2, 3\}$.

Opisz geometryczny (fraktalny) sposób konstrukcji wykresu funkcji f. Udowodnij, że $f(t)$ nie zależy od wyboru ciągu (a_n) (jest on niejednoznaczny, gdy $a_n = 0$ od pewnego miejsca lub $a_n = 5$ od pewnego miejsca). Udowodnij, że f jest ciągła na $[0, 1]$. Zauważ, że f przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$ — każdą nieskończenie wiele (a nawet continuum!) razy. (Inna taka funkcja: współrzędna pionowa punktu na krzywej Hilberta).

Przykładowy kod *Mathematica*:

```
dmap[{_, c_}, a_] :=
  If[c == 0, #, 1 - #] &[
   {a /. {0 -> 0, 1 -> 1, 2 -> 1, 3 -> 0, 4 -> 0, 5 -> 1},
    a /. {0 -> 0, 1 -> 0, 2 -> 1, 3 -> 1, 4 -> 0, 5 -> 0}}
   ];
f[x_?NumericQ] := Module[{d},
   d = RealDigits[x, 6];
   d = Join[ConstantArray[0, -d[[2]]], d[[1]]];
   d = Rest[FoldList[dmap, {0, 0}, d]];
   FromDigits[{First /@ d, 0}, 2] + Last[Last[d]]/2^Length[d]
   ];
f[0] = 0; f[1] = 1;
Show[
 Table[
  ListPlot[
   Table[{x, f[x]}, {x, 0, 1, 1/6^n}],
   Joined -> True, PlotStyle -> ColorData[22, "ColorList"][[n]]
   ],
  {n, 4, 1, -1}
  ],
 ImageSize -> 2000]
```


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0