Lista zadań nr 14: Obliczanie pochodnych

(1) Udowodnij indukcyjnie, że dla $n \geqslant 1$ pochodną funkcji danej wzorem $f(x) = x^n$ jest $f(x) = nx^{n-1}$ (gdzie *wyjątkowo* przyjmujemy, że $0^0 = 1$).

(2) Uzasadnij podane na wykładzie wzory na pochodne funkcji arccos, arctg i $\log_a$ (gdzie $a > 0$, $a \neq 1$).

(3) Wyznacz pochodne prawostronne w 0 funkcji $f(x) = \arcsin(1-x)$, $g(x) = \arcsin(1-x^2)$ oraz $h(x) = \arcsin(1-x^3)$.

(4) Oblicz pochodne funkcji danych wzorami

$$\frac{x^2+x+1}{(1+x^2)^9}, \quad e^x \sin(x), \quad e^{x\sin(x)}, \quad \frac{\ln(1+e^x)}{1-e^x}, \quad \sqrt[3]{\ln(1+x^3)}, \quad \arcsin(\sin(x)).$$

(5) Oblicz pochodne funkcji danych wzorami $f(x) = x^x$, $g(x) = \sqrt[x]{x}$ oraz $h(x) = x^{x^x}$.

(6) Dla jakich wartości parametru a funkcja dana wzorem $f(x) = |x|^a$ ma pochodną w 0?

(7) Dobierz wartości parametrów a i b tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ a\cos(x) + b\sin(x) & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

była różniczkowalna w 0.

(8) Oblicz pochodne funkcji sinh, cosh i tgh, a następnie wyznacz pochodne funkcji arsinh, arcosh oraz artgh.

(9) Niech g będzie funkcją odwrotną do $f(x) = x^x$ na przedziale $[1, \infty)$. Wyznacz $g'_+(1)$ oraz $g'(4)$.

(10) Niech g będzie funkcją odwrotną do $f(x) = xe^x$ na przedziale $(0, \infty)$ (tj. funkcją W_0 Lamberta). Wyznacz $g'(e)$.

(11) Wiadomo, że f jest ściśle monotoniczną funkcją ciągłą na przedziale zawierającym ustalony punkt a, $f'(a) = 0$ oraz g jest funkcją odwrotną do f. Co można powiedzieć o $g'(b)$ dla $b = f(a)$?

(12) Udowodnij, że pochodną funkcji parzystej jest funkcja nieparzysta, funkcji nieparzystej — parzysta, funkcji okresowej — okresowa. Czy zachodzą twierdzenia przeciwne?

(13) Dobierz wartości parametrów a i b tak, aby wykresy funkcji danych wzorami $f(x) = \cos(x)$ i $g(x) = a - bx^2$ były styczne w punkcie $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

(14) Niech $f(x) = 3x^6 - 25x^4 + 60x^2$. Znajdź wszystkie styczne do wykresu funkcji f, które przechodzą przez punkt $(0, 0)$.

(15) Dla ustalonego $a > 0$ dobierz wartość parametru $r > 0$ tak, aby okrąg o środku $(0, a)$ i promieniu r był styczny do paraboli danej równaniem $y = x^2$.

(16) Wyznacz $f^{(n)}(0)$ gdy: (a) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem; (b) $f(x) = a^x$ dla pewnego $a > 0$; (c) $f(x) = (1-x)^{-a}$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Zapisz kilkanaście wybranych funkcji elementarnych i wyznacz ich pochodne.

(ii) Wyznacz pochodne jednostronne (właściwe lub niewłaściwe) funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor$ oraz $g(x) = \lceil x \rceil$ w punkcie 1.

(iii) Sprawdź, że wykresy funkcji danych wzorami $\sin(x)$, x, $\mathrm{tg}(x)$, $\arcsin(x)$ oraz $\mathrm{arctg}(x)$ są do siebie styczne w punkcie $(0,0)$ (tj. mają w tym punkcie wspólną prostą styczną).

(iv) Jak przy pomocy pochodnych zapisać warunek: prosta $x = a$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$?

Zadania dodatkowe

(A) Znajdź wielomian f możliwie najniższego stopnia, ale różny od funkcji liniowej, o następującej własności: styczne do $y = f(x)$ w punktach $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ i $(3, f(3))$ mają punkt wspólny. Czy potrafisz uogólnić to zadanie?

(B) Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Udowodnij, że pochodna $f^{(n)}(x)$ istnieje dla $x \neq 0$ i jest postaci $P_n(\frac{1}{x})f(x)$, gdzie P_n jest pewnym wielomianem. Następnie udowodnij, że f jest dowolnie wiele razy różniczkowalna w zerze i $f^{(n)}(0) = 0$.

Zauważ, że funkcja $g(x) = f(x)/(f(x) + f(1-x))$ jest dowolnie wiele razy różniczkowalna, równa 0 w $(-\infty, 0]$ i równa 1 w $[1, +\infty)$. Oznacza to, że funkcja $h(x) = g(2+x)g(2-x)$ jest dowolnie wiele razy różniczkowalna, równa 0 w $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ i równa 1 w $[-1, 1]$.

(C) Udowodnij, że jeśli we wzorze określającym wartość $f(a)$ funkcji elementarnej f nie występuje pierwiastkowanie zera ani arcsin lub arccos wartości 1 lub -1, to f jest różniczkowalna w a.

(D) Udowodnij *wzór Faà di Bruno*: pochodna $f \circ g$ rzędu n w punkcie a jest dana wzorem:

$$(f \circ g)^{(n)}(a) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} f^{(k_1+k_2+\ldots+k_n)}(g(a)) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{g^{(j)}(a)}{j!} \right)^{k_j},$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie układy liczb naturalnych $k_1, k_2, \ldots, k_n$ takich, że $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + nk_n = n$.