Lista zadań nr 2: liczby rzeczywiste

W poniższych zadaniach korzystaj wyłącznie *z postulatów liczb rzeczywistych i praw logiki. W zad.* (5) *wykorzystaj równość* $-(-a) = a$, *zaś w zadaniu* (6) *nierówność* $0 < 1$ *(własności udowodnione na wykładzie).*

(1) Udowodnij, że $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a+(-b) \leqslant 0$. Wywnioskuj, że $a \leqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leqslant -a$ oraz $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-b \leqslant -a$.

(2) Udowodnij, że jeśli $a \leqslant b$ oraz $c \leqslant d$, to $a + c \leqslant b + d$.

(3) Udowodnij, że jeśli $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$, $0 \leqslant p$, $0 \leqslant q$, to $a \cdot b \leqslant (a + p) \cdot (b + q)$. Wywnioskuj, że jeśli $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$, $a \leqslant c$, $b \leqslant d$, to $a \cdot b \leqslant c \cdot d$.

(4) Niech A będzie niepustym podzbiorem ograniczonego z góry zbioru B. Udowodnij nierówność $\sup A \leqslant \sup B$.

(5) Niech A będzie niepustym zbiorem ograniczonym z dołu. Niech $B = \{b \in \mathbb{R} : -b \in A\}$. Udowodnij, że B jest ograniczony z góry oraz $-\sup B$ jest kresem dolnym A. (Zatem niepuste zbiory ograniczone z dołu mają kres dolny).

(6) Udowodnij, że jeśli $a < b$, to liczba $c = \frac{1}{2}(a+b)$ spełnia nierówności $a < c$ i $c < b$. (Tutaj $\frac{1}{2}$ oznacza liczbę $(1 + 1)^{-1}$).

(7) Niech b będzie ograniczeniem z góry zbioru A. Załóżmy, że każda liczba c spełniająca warunek $c < b$ ma następującą własność: istnieje $x \in A$ taki, że $c \leqslant x$ (słaba nierówność!). Udowodnij, że b jest kresem górnym zbioru A.

W kolejnych zadaniach śmiało korzystaj ze wszystkich znanych własności liczb rzeczywistych, wymiernych i całkowitych — tak, jak w szkole średniej. W wyznaczaniu kresów warto korzystać z zadania (7).

(8) Udowodnij, że kresem dolnym zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ jest 0. (Zadanie to wróci na liście zadań nr 3).

(9) Udowodnij, że kresem górnym zbioru $\{0, 0{,}9, 0{,}99, 0{,}999, \dots\}$ jest 1. Wywnioskuj, że $0{,}(9) = 1$ (niezależnie od tego, jak w zasadzie definiujemy $0{,}(9)$).

(10) Udowodnij, że istnieje pierwiastek kwadratowy z dwóch. Ściślej: wykaż, że kres górny zbioru $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a,\ a^2 \leqslant 2\}$ spełnia warunek $\sup A \cdot \sup A = 2$.

(11) Udowodnij, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie m i n takie, że $m^2 = 2n^2$. Wykorzystaj ten fakt do dowodu, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

(12) Udowodnij, że $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nie jest liczbą wymierną.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Dlaczego (intuicyjnie) nie istnieje dodatnia liczba mniejsza od $\frac{1}{n}$ dla wszystkich $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$?

(ii) Ile czynników 2 może występować w rozkładzie na czynniki pierwsze kwadratu liczby całkowitej?

W poniższych zadaniach korzystaj wyłącznie z postulatów liczb rzeczywistych i praw logiki.

(iii) Niech $a = 1 + 1$. Udowodnij, że $x + x = a \cdot x$ oraz $a^{-1} + a^{-1} = 1$. (Liczbę a nazywamy 2, liczbę a^{-1} zaś $\frac{1}{2}$).

(iv) Udowodnij, że jeśli zbiór A ma element największy, to jest on kresem górnym A.

(v) Sformułuj kilka równoważnych definicji kresu dolnego i starannie uzasadnij ich równoważność.

(vi) Udowodnij, że jeśli nie zachodzi nierówność $y \leqslant x$, to zachodzą warunki $x \leqslant y$ oraz $x \neq y$.

Zadania dodatkowe

(A) *Konstrukcja Dedekinda zbioru liczb rzeczywistych.* Przyjmijmy, że mamy już zdefiniowany zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, o którym wiemy, że spełnia on wszystkie aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych z wyjątkiem aksjomatu zupełności Dedekinda (więcej o tej konstrukcji na kursie *Wstęp do logiki i teorii mnogości*). *Przedziałem Dedekinda* nazywamy dowolny właściwy i niepusty podzbiór A zbioru $\mathbb{Q}$ o następujących własnościach:

- jeśli $x \in A$ i $y \leqslant x$, to $y \in A$;
- A nie zawiera elementu największego.

Na zbiorze R przedziałów Dedekinda wprowadzamy oznaczenia i działania:

$$\tilde{0} = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}; \qquad \tilde{1} = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\};$$

$$-A = \{b - a : a \in \mathbb{Q} \setminus A,\ b \in \mathbb{Q},\ b < 0\};$$

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\};$$

$$A^{-1} = \begin{cases} \tilde{0} \cup \{a \cdot b : a \in \mathbb{Q} \setminus A,\ a \geqslant 0,\ b \in \mathbb{Q},\ 0 < b < 1\} & \text{gdy } \tilde{0} \subseteq A, \\ -((-A)^{-1}) & \text{gdy } A \subset \tilde{0}. \end{cases}$$

$$A \odot B = \begin{cases} \tilde{0} \cup \{a \cdot b : a \in A,\ a \geqslant 0,\ b \in B,\ b \geqslant 0\} & \text{gdy } \tilde{0} \subseteq A \text{ i } \tilde{0} \subseteq B, \\ -((-A) \odot B) & \text{gdy } A \subset \tilde{0} \text{ i } \tilde{0} \subseteq B, \\ -(A \odot (-B)) & \text{gdy } \tilde{0} \subseteq A \text{ i } B \subset \tilde{0}, \\ (-A) \odot (-B) & \text{gdy } A \subset \tilde{0} \text{ i } B \subset \tilde{0}. \end{cases}$$

Udowodnij, że R z elementami wyróżnionymi $\tilde{0}$ i $\tilde{1}$, działaniami $\oplus$ i $\odot$ i relacją $\subseteq$ jest zbiorem liczb rzeczywistych, a kresem górnym rodziny przedziałów Dedekinda jest suma mnogościowa tej rodziny.

(B) Przypuśćmy, że $0 \leqslant p$ i niech $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x,\ x \cdot x \leqslant p\}$. Udowodnij, że A jest niepusty i ograniczony z góry (np. przez $1 + p$) oraz że jego kres górny $a = \sup A$ spełnia $a \cdot a = p$. (Liczbę a nazywa się pierwiastkiem kwadratowym z p i oznacza $\sqrt{p}$. Korzystaj tylko z postulatów liczb rzeczywistych, praw logiki i nierówności $0 < 1$).

(C) Znajdź informacje na temat *liczb nadrzeczywistych* (ang. *surreal numbers*).

UWAGI:

- liczby rzeczywiste to zbiór $\mathbb{R}$, w którym wyróżniono dwa różne elementy 0 i 1, określono działania $+$ i $\cdot$ oraz zadano porządek $\leqslant$ w taki sposób, że:

  (R1) $x + y = y + x$; (*przemienność dodawania*)
  $(x + y) + z = x + (y + z)$; (*łączność dodawania*)
  $x + 0 = x$; (0 *jest elementem neutralnym dodawania*)
  istnieje $-x$ takie, że $x + (-x) = 0$; (*istnienie elementu przeciwnego*)

  (R2) $x \cdot y = y \cdot x$; (*przemienność mnożenia*)
  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$; (*łączność mnożenia*)
  $x \cdot 1 = x$; (1 *jest elementem neutralnym mnożenia*)
  jeśli $x \neq 0$, to istnieje x^{-1} takie, że $x \cdot x^{-1} = 1$;
  (*istnienie elementu odwrotnego*)

  (R3) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$; (*rozdzielność dodawania względem mnożenia*)

  (R4) $x \leqslant x$; (*zwrotność porządku*)
  jeśli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant x$, to $x = y$; (*antysymetria porządku*)
  jeśli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant z$, to $x \leqslant z$; (*przechodniość porządku*)
  $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$; (*liniowość porządku*)

  (R5) jeśli $x \leqslant y$, to $x + z \leqslant y + z$; (*zgodność dodawania z porządkiem*)
  jeśli $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$, to $0 \leqslant x \cdot y$; (*zgodność mnożenia z porządkiem*)

  (R6) jeśli niepusty podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych jest ograniczony z góry, to ma kres górny; (*własność kresów* lub *postulat zupełności Dedekinda*)
- a jest *ograniczeniem z góry* zbioru A, jeśli dla wszystkich $x \in A$ zachodzi $x \leqslant a$;
- a jest *kresem górnym* zbioru A, jeśli jest najmniejszym z jego ograniczeń z góry; równoważnie:
  - $x \leqslant a$ dla wszystkich $a \in A$;
  - jeśli liczba b ma własność: $x \leqslant b$ dla wszystkich $x \in A$, to $a \leqslant b$;
- zbiór A jest *ograniczony z góry*, jeśli ma ograniczenie z góry;
- analogicznie określa się *ograniczenie z dołu* i *kres dolny*;
- kres górny A nazywa się też *supremum* A i oznacza $\sup A$;
  kres dolny A to inaczej *infimum* A, oznaczane $\inf A$;
- ze względu na łączność piszemy $x+y+z$, mając na myśli $(x+y)+z$ albo $x+(y+z)$; podobnie piszemy $x \cdot y \cdot z$ w miejsce $(x \cdot y) \cdot z$ oraz $x \cdot (y \cdot z)$;
- często pomija się kropkę i pisze xy zamiast $x \cdot y$;
- zamiast $x + (-y)$ pisze się $x - y$;
  zamiast $x \cdot y^{-1}$ pisze się x/y lub $\frac{x}{y}$;
- $x < y$ oznacza $x \leqslant y$ i $x \neq y$;
  $x \geqslant y$ oznacza $y \leqslant x$;
  $x > y$ to inny zapis $y < x$.