Lista zadań nr 3: liczby rzeczywiste/indukcja

(1) Wyznacz kres górny i kres dolny zbioru $\{\frac{n-m}{n+m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

(2) Przypuśćmy, że zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są niepuste i oznaczmy

$$A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}.$$

Udowodnij, że $A + B$ jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy, gdy A i B są ograniczone z góry i że zachodzi wzór $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(3) Wiadomo, że $A + B$ posiada element największy. Czy A oraz B muszą posiadać element największy?

(4) Rozłączne i niepuste zbiory A i B są ograniczone z góry oraz spełniają warunki:
- dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in B$ taki, że $a < b$;
- dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A$ taki, że $b < a$.

Co można powiedzieć o $\sup A$ i $\sup B$? Czy zbiory A i B mają element największy? Podaj przykład zbiorów A i B o powyższych własnościach.

(5) Na płaszczyźnie narysowano n prostych, z których żadnie dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ części.

(6) Udowodnij, że $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n = \dfrac{n^3 - n}{3}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

(7) Udowodnij, że $\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(8) Udowodnij, że $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{2n}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(9) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ liczba $n! + 1$ ma czynnik pierwszy większy od n. Wywnioskuj, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

W poniższych zadaniach korzystaj wyłącznie z postulatów liczb rzeczywistych, nierówności $0 < 1$, zamkniętości $\mathbb{N}$ na dodawanie i mnożenie, zasady indukcji i praw logiki. To już ostatnie takie zadania na kursie analizy matematycznej!

(10) Udowodnij, że $1 \leqslant n$ dla każdej liczby naturalnej n.

(11) Udowodnij, że 0 jest ograniczeniem dolnym zbioru $A = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Niech $a = \inf A$ oznacza kres dolny zbioru A. Udowodnij, że $a + a$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A i wobec tego $a + a \leqslant a$. Wywnioskuj, że $a = 0$.

(12) Wykorzystując poprzednie zadanie, wykaż, że nie istnieje liczba rzeczywista większa od każdej liczby naturalnej.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Wyznacz kresy zbiorów $A = \{\frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\}$ oraz $B = \{\frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{Z}\}$. Czy zbiory te mają elementy najmniejsze i największe?

(ii) Udowodnij formalnie (metodą indukcji), że każdy niepusty skończony zbiór liczb rzeczywistych zawiera element największy.

(iii) Każdy zbiór koni składa się z koni tego samego koloru. Istotnie, jednoelementowe zbiory koni oczywiście mają tę własność. Przypuśćmy, że n-elementowe zbiory koni mają tę własność i rozważmy zbiór $(n+1)$-elementowy $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}\}$. Na mocy założenia indukcyjnego konie $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mają ten sam kolor; podobnie konie $k_2, k_3, \ldots, k_{n+1}$ mają ten sam kolor. Wobec tego K składa się z koni tego samego koloru, co kończy dowód indukcyjny. Gdzie jest błąd w tym rozumowaniu?

(iv) Każdą liczbę naturalną można opisać przy pomocy mniej niż trzynastu słów. W istocie, rozważmy zbiór A liczb, które nie mają tej własności. Jeśli A jest niepusty, to ma element najmniejszy. Jest to „najmniejsza liczba, której nie można opisać przy pomocy mniej niż trzynastu słów". Właśnie ją opisaliśmy przy pomocy dwunstu słów — sprzeczność! Czy umiesz znaleźć błąd w tym rozumowaniu?

Zadania dodatkowe

(A) Udowodnij, że suma liczb naturalnych jest liczbą naturalną. Wskazówka: rozważ zbiór A wszystkich liczb $x \in \mathbb{N}$ o własności: $y + x \in \mathbb{N}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{N}$. Udowodnij indukcyjnie, że $A = \mathbb{N}$.

(B) Udowodnij, że iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną.

(C) Udowodnij, że jeśli liczby całkowite dodatnie x i y nie mają wspólnych dzielników większych od 1, to $ax + by = 1$ dla pewnych liczb całkowitych a, b. Wykorzystaj w tym celu algorytm Euklidesa znajdowania największego wspólnego dzielnika: udowodnij, że liczby uzyskiwane w kolejnych krokach tego algorytmu są postaci $ax + by$.

(D) Przy pomocy wyniku z poprzedniego zadania udowodnij, że jeśli liczba pierwsza p dzieli iloczyn liczb naturalnych x, y, to dzieli którąś z nich.

(E) Wykorzystując poprzednie zadanie, udowodnij jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze.

(F) Przypuśćmy, że κ jest „liczbą", której kwadrat wynosi -5 i rozważmy zbiór liczb $Y = \{m + n\kappa : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Wówczas $6 = 2 \cdot 3 = (1+\kappa)(1-\kappa)$ zadaje dwa istotnie różne rozkłady liczby 6 na *czynniki nierozkładalne* w Y, zatem w Y nie zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze. Zapamiętaj ten przykład i przeanalizuj go dokładniej, gdy nauczysz się o liczbach zespolonych.

(G) W przestrzeni poprowadzono $n \geqslant 3$ płaszczyzn, z których każde trzy mają punkt wspólny, ale żadne cztery nie mają punktu wspólnego. Na ile części płaszczyzny te dzielą przestrzeń?

Uwagi:

- Silnia liczby $n \in \mathbb{N}_0$ to liczba $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Ściślej mówiąc, określamy $0! = 1$ oraz $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ dla $n \in \mathbb{N}_0$.
- Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ to najmniejszy pozdbiór $\mathbb{R}$, który zawiera 1 i wraz z każdym swoim elementem n zawiera element $n+1$. Zbiór $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ to najmniejszy pozdbiór $\mathbb{R}$, który zawiera 0 i wraz z każdym swoim elementem n zawiera element $n+1$.