Lista zadań nr 4: ciągi

(1) Dany ciąg jest ograniczony od pewnego miejsca. Czy musi on być ograniczony?

(2) Ciąg (a_n) jest ściśle monotoniczny. Czy ciąg $(-a_n)$ jest ściśle monotoniczny? Czy ciąg $(\frac{1}{a_n})$ jest ściśle monotoniczny? Czy odpowiedź się zmieni, jeśli zastąpimy ścisłą monotoniczność — ścisłą monotonicznością od pewnego miejsca?

(3) Utwórz wszystkie prawdziwe zdania zgodne z szablonem:

$$„\begin{Bmatrix}\text{suma}\\ \text{różnica}\\ \text{iloczyn}\\ \text{iloraz}\end{Bmatrix}\text{ ciągu } (a_n) \text{ ograniczonego z } \begin{Bmatrix}\text{góry}\\ \text{dołu}\end{Bmatrix} \text{ przez } A \text{ oraz ciągu } (b_n) \text{ ograniczonego z } \begin{Bmatrix}\text{góry}\\ \text{dołu}\end{Bmatrix} \text{ przez } B \text{ jest ciągiem ograniczonym z } \begin{Bmatrix}\text{góry}\\ \text{dołu}\end{Bmatrix}".$$

Dla iloczynu i ilorazu wskaż też zdania, które są prawdziwe przy odpowiednich dodatkowych założeniach na A i B.

(4) Od którego miejsca ciąg o wyrazach $a_n = n^3 - 30n^2 + 100n$ jest monotoniczny?

(5) Przypuśćmy, że f jest funkcją rosnącą (tj. $f(x) \leqslant f(y)$ gdy $x \leqslant y$), zaś ciąg (a_n) spełnia równanie $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny. W tym celu wykaż (metodą indukcji), że jeśli $a_1 \leqslant a_2$, to (a_n) jest rosnący, zaś jeśli $a_1 \geqslant a_2$, to (a_n) jest malejący.

(6) Wykorzystując poprzednie zadanie, zbadaj monotoniczność ciągów (a_n), (b_n) i (c_n) danych wzorami

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_{n+1} &= \tfrac{1}{4}(a_n^2 + 1),\\ b_1 &= 2, & b_{n+1} &= \tfrac{1}{4}(b_n^2 + 1),\\ c_1 &= 4, & c_{n+1} &= \tfrac{1}{4}(c_n^2 + 1), \end{aligned}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij ponadto, że $a_n \leqslant b_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(7) Uzasadnij, że ciągi (a_n) i (b_n) z poprzedniego zadania są ograniczone, natomiast ciąg (c_n) — nie. Wskazówka: wykaż, że $c_{n+1} - c_n \geqslant \frac{1}{4}$.

(8) Udowodnij, że ciąg (a_n) spełniający równania $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ (gdzie $n \in \mathbb{N}$) jest ograniczony i malejący*.

(9) Ciąg (a_n) spełnia równanie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Co trzeba założyć o a_1 i a_2, aby ten ciąg był rosnący?

*Dodatkowo wyznacz (ręcznie) a_4 i (komputerowo) a_5 oraz porównaj te wartości z $\sqrt{2}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Ciąg (a_n) jest ograniczony. Czy ograniczony jest ciąg $(-a_n)$? A ciąg $(\frac{1}{a_n})$?

(ii) Udowodnij, że ciąg (a_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(|a_n|)$ jest ograniczony z góry.

(iii) Udowodnij, że ciąg o wyrazach $a_n = \frac{n-2}{2n-7}$ jest monotoniczny od pewnego miejsca.

(iv) Czy ciąg z poprzedniego zadania jest ograniczony?

(v) Wskaż przykład ciągu, którego wyrazów nie da się tak poprzestawiać, by uzyskać ciąg monotoniczny.

Zadania dodatkowe

(A) Przypuśćmy, że f jest funkcją malejącą (tj. $f(x) \geqslant f(y)$ gdy $x \leqslant y$), zaś ciąg (a_n) spełnia równanie $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Czy ciąg (a_n) może być monotoniczny? A co można powiedzieć o ciągach (a_{2n}) i (a_{2n+1}) (czyli *podciągach* wyjściowego ciągu)?

(B) Ciąg (a_n) spełnia równanie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Udowodnij, że wartości a_1 i a_2 w pełni określają ciąg (a_n) (a więc dowolne dwa ciągi spełniające rozważane równanie są równe, jeśli zgodne są ich dwa pierwsze elementy).

(b) Znajdź dwie wartości q, dla których ciąg o wyrazach $a_n = q^n$ spełnia rozważane równanie.

(c) Wyraź ogólny wyraz ciągu a_n przy pomocy a_1 i a_2. Zapisz w szczególności wzór na n-ty wyraz *ciągu Fibonacciego*, spełniającego warunek $a_1 = a_2 = 1$.

(d) Co trzeba założyć o a_1 i a_2, aby ciąg (a_n) był rosnący *od pewnego miejsca*?

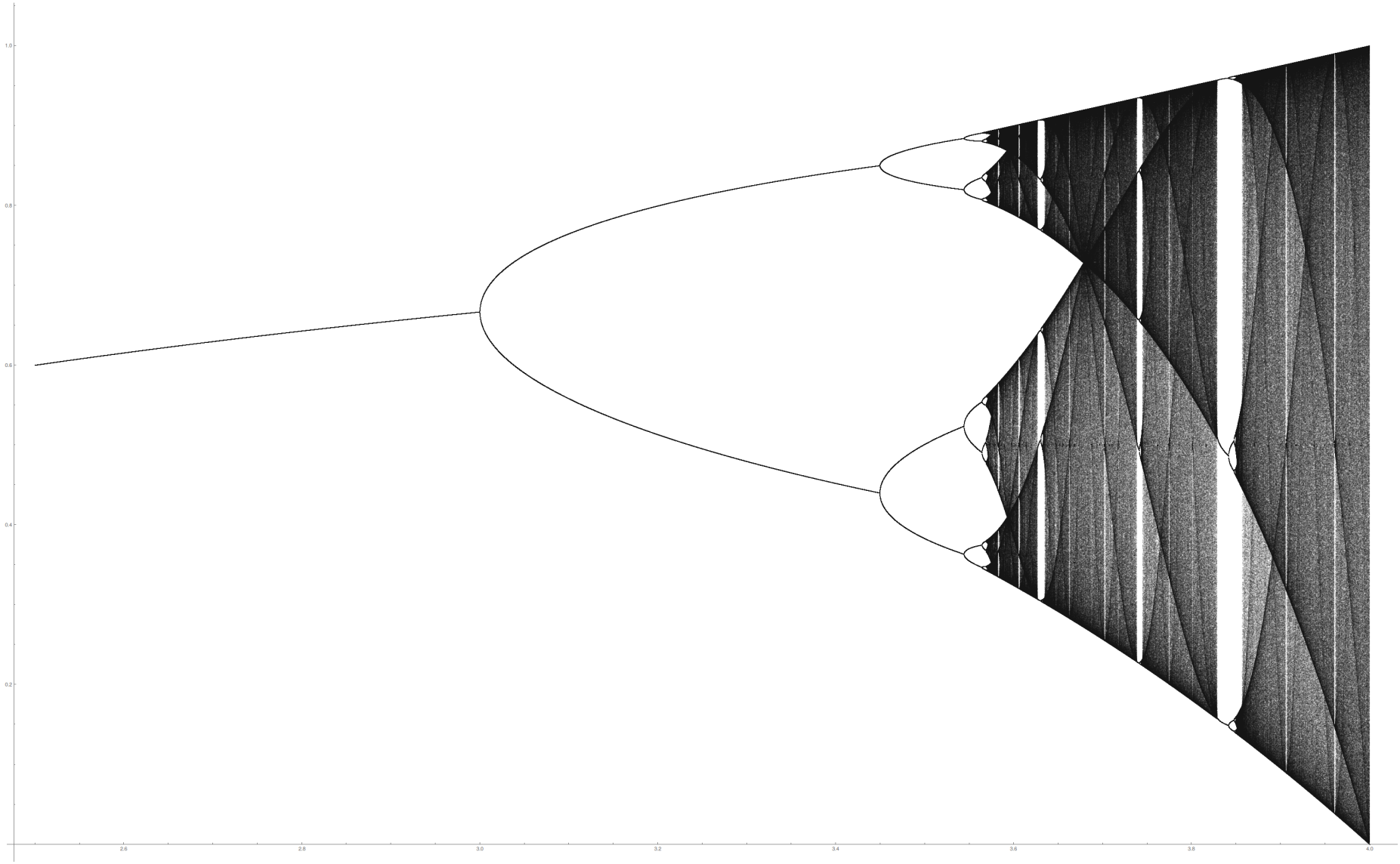
(C) Ciąg (a_n) spełnia równanie $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = pa_n(1-a_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, zaś $p \in (0, 4]$ jest ustalonym parametrem.

(a) Oblicz i zaznacz na osi liczbowej (przy pomocy komputera) dalekie wyrazy ciągu (a_n), np. od a_{10000} do a_{11000}, dla $p = 2{,}5$, $p = 3{,}2$, $p = 3{,}83$, $p = 3{,}5$, $p = 3{,}55$, $p = 3{,}6$ i $p = 4$.

(b) Dla kolejnych wartości p od 2,5 do 4 z krokiem 0,001 zaznacz dalekie wyrazy ciągu (a_n) (traktowane jako współrzędne y) na prostej $x = p$, sporządzając w ten sposób *diagram Feigenbauma*.

Przykładowy kod *Mathematica*:

```
ListPlot[
 Table[
  {p, #} & /@ NestList[p # (1 - #) &, Nest[p # (1 - #) &, 0.5, 9999], 1000],
  {p, 2.5, 4, 0.001}
 ],
 Joined -> False, PlotStyle -> Directive[Black, PointSize[0], Opacity[0.1]]
]
```


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0