Lista zadań nr 5: granice ciągów

(1) Wyjaśnij, dlaczego w definicji granicy wystarczy rozważać $\varepsilon \in (0,1)$ (czy ogólniej $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ dla dowolnego ustalonego $\varepsilon_0 > 0$).

(2) Ciąg (a_n) o nieujemnych wyrazach jest zbieżny do 0. Udowodnij (z definicji), że ciąg $(\sqrt{a_n})$ jest zbieżny do 0.

(3) Ciąg (a_n) o nieujemnych wyrazach jest zbieżny do 1. Udowodnij (z definicji), że ciąg $(\sqrt{a_n})$ jest zbieżny do 1. Wskazówka: udowodnij, że $|\sqrt{a_n} - 1| \leqslant |a_n - 1|$.

(4) Ciąg (a_n) o nieujemnych wyrazach jest zbieżny do $x \geqslant 0$. Udowodnij (wykorzystując poprzednie dwa zadania i twierdzenie o arytmetyce granic), że ciąg $(\sqrt{a_n})$ jest zbieżny do $\sqrt{x}$.

(5) Oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}.$$

(6) Ciągi $(a_n + b_n)$ oraz $(a_n - b_n)$ są zbieżne. Czy zbieżne są ciągi (a_n) i (b_n)?

(7) Ciągi $(a_n b_n)$ oraz (a_n/b_n) są zbieżne. Czy zbieżne są ciągi (a_n) i (b_n)? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli wiadomo, że $a_n, b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$?

(8) Na mocy nierówności Bernoulliego dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x > 1$ zachodzi $(1+x)^n \geqslant 1 + nx > nx$. Wstawiając $x = \frac{1}{|q|} - 1$ (gdzie $|q| < 1$ oraz $q \neq 0$), wywnioskuj, że

$$|q^n| < \frac{|q|}{1-|q|} \cdot \frac{1}{n}.$$

Wykorzystaj to oszacowanie do obliczenia (z definicji) granicy ciągu geometrycznego o wyrazach $a_n = q^n$. Nie korzystaj z logarytmów!

(9) Niech $a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$, gdzie $|q| < 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij indukcyjnie, że $a_n = \frac{1-q^n}{1-q}$, a następnie wyznacz granicę ciągu (a_n).

(10) Ciąg (a_n) spełnia równanie $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Ile wynosi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, jeśli wiadomo, że ta granica istnieje?

(11) Wykorzystaj twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granic

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{-n} + 2^{-n}}.$$

(12) Podnosząc obie strony nierówności Bernoulliego do kwadratu, wywnioskuj nierówność $(1+x)^{2n} \geqslant n^2 x^2$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 0$. Wykorzystaj tę nierówność dla $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ oraz twierdzenie o trzech ciągach do wyznaczenia $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$. Następnie oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Dlaczego w definicji zbieżności można zastąpić mocne nierówności słabymi?

(ii) Ciąg (a_n) jest zbieżny. Czy zbieżny jest ciąg (a_{n+1})? A ciąg (a_{2n})?

(iii) Ciąg (a_n) jest zbieżny. Czy zbieżny jest ciąg $(a_{n+1} - a_n)$?

(iv) Ciąg $(a_{n+1} - a_n)$ jest zbieżny do zera. Czy zbieżny jest ciąg (a_n)?

(v) Wskaż przykład rozbieżnego ciągu (a_n) takiego, że ciąg (a_n^2) jest zbieżny. Co można dodatkowo założyć o wyrazach albo o granicy ciągu (a_n), aby ze zbieżności ciągu (a_n^2) wynikała zbieżność ciągu (a_n)?

(vi) Udowodnij, że ciąg o wyrazach $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ dąży do 1.

Zadania dodatkowe

(A) Ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) są dane równaniami

$$a_1 = b_1 = c_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = a_n^2, \qquad b_{n+1} = b_n - b_n^2, \qquad c_{n+1} = c_n - (c_n)^{1/c_n}.$$

Łatwo wykazać, że wszystkie one są zbieżne do zera (dlaczego?). Ale jak szybko dążą one do zera?

(B) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 1 + \frac{x^2}{4}$ i $g(x) = x$ (na jednym wykresie). Niech $a_1 = 0$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Narysuj (na tym samym wykresie) łamaną o wierzchołkach: (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_3), (a_3, a_4), ... Odgadnij granicę ciągu (a_n). Opisz geometryczny sposób konstrukcji ciągu (a_n) zadanego równaniem $a_{n+1} = f(a_n)$ dla ogólnej funkcji f i zinterpretuj wyniki ćwiczeń (6) oraz (A) z listy zadań nr 4.

(C) Wykorzystując odpowiednio nierówność Bernoulliego, wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{N}$ i $b > 1$.

(D) Ciąg (a_n) spełnia równanie $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ i nie jest stale równy zero. Udowodnij, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje. Wskazówka: wykorzystaj wynik zadania (B) z listy zadań nr 4.