Lista zadań nr 6: ciągi monotoniczne, e, ciągi podstawowe

(1) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}-\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\right)\right)$. Wskazówka: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

(2) Ciągi (a_n) i (b_n) z ćwiczenia (7) z listy zadań nr 4 są monotoniczne i ograniczone, są zatem zbieżne. Wyznacz ich granicę. Przypomnienie:

$$a_1=0, \qquad a_{n+1}=\tfrac{1}{4}(a_n^2+1),$$
$$b_1=2, \qquad b_{n+1}=\tfrac{1}{4}(b_n^2+1).$$

(3) Ciąg (a_n) z ćwiczenia (9) z listy zadań nr 4 jest monotoniczny i ograniczony, jest więc zbieżny. Wyznacz jego granicę. Przypomnienie:

$$a_1=2, \qquad a_{n+1}=\tfrac{1}{2}(a_n+\tfrac{2}{a_n}).$$

(4) Wykaż, że dla dowolnego ciągu cyfr (d_n) ciąg o wyrazach $\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+\ldots+\frac{d_n}{10^n}$ jest zbieżny. Jak opisać granicę?

(5) Ciąg (a_n) spełnia równania $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Czy ciąg (a_n) jest ograniczony? Wskazówka: jeśli jest ograniczony, to jest również zbieżny — co można powiedzieć o granicy?

(6) Wywnioskuj z nierówności Bernoulliego, że $(1-\frac{1}{n^2})^n\geqslant 1-\frac{1}{n}$. Wykorzystaj tę nierówność, by udowodnić monotoniczność ciągu o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^n$.

(7) Wywnioskuj z nierówności Bernoulliego, że $(1-\frac{1}{2n})^n\geqslant\frac{1}{2}$, czyli $(1+\frac{1}{2n-1})^n\leqslant 2$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wykorzystaj ten fakt i wynik poprzedniego ćwiczenia do dowodu, że ciąg $(1+\frac{1}{n})^n$ jest ograniczony z góry przez 4.

Z poprzednich dwóch zadań wynika, że ciąg o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^n$ jest zbieżny. Jego granicę oznacza się symbolem e. W przyszłości udowodnimy, że definicja ta jest równoważna definicji $e=\exp(1)$.

(8) (*Zadanie rumuńskie*). Czworo przyjaciół zamówiło w barze kawę z mlekiem. Każdy z nich otrzymał dwa wypełnione po brzegi kubki, jeden z kawą, drugi z mlekiem. Każdy z przyjaciół pił z kubka, który początkowo zawierał kawę, uzupełniając go po każdym łyku do pełna mlekiem z drugiego kubka. Jeden z przyjaciół zadał pytanie: jakie będzie stężenie kawy w napoju w chwili, gdy kubek z mlekiem zostanie opróżniony? Odpowiedz na to pytanie, przyjmując, że kubek składa się z n jednakowych łyków. Wyznacz granicę, gdy n dąży do nieskończoności.

(9) (*Średnie Cesàro*). Udowodnij, że jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do x, to ciąg o wyrazach $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ jest również zbieżny do x. Wykaż też, że przeciwne wynikanie nie jest prawdziwe.

(10) Udowodnij, że ciąg (a_n) jest podstawowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że jeśli $n>N$, to $|a_n-a_N|<\varepsilon$.

(11) Udowodnij, że z warunku $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$ dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$ nie wynika, że ciąg (a_n) jest podstawowy (a więc zbieżny). Czy odpowiedź się zmieni, jeśli założymy, że ciąg (a_n) jest dodatkowo ograniczony?

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Wyjaśnij, dlaczego z warunku $\lim_{n\to\infty} a_n < x$, wynika, że $a_n < x$ od pewnego miejsca. Czy ostre nierówności można zastąpić słabymi?

(ii) Uzasadnij, że jeśli $a_n > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca malejący i wobec tego zbieżny.

(iii) Wiadomo, że $a_n > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Czy $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$? Czy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$?

Zadania dodatkowe

(A) (*Ciągi podaddytywne*). Udowodnij, że jeśli nieujemny ciąg (a_n) spełnia warunek $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$, to ciąg o wyrazach $\frac{a_n}{n}$ jest zbieżny, a granica jest równa $\inf\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Wskaż przykład takiego ciągu, dla którego ponadto ciąg $(\frac{a_n}{n})$ nie jest od pewnego miejsca malejący.

(B) Ciąg o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący. Udowodnij, że ciąg o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący (i wyznacz jego granicę). Czy ciąg o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}$ jest monotoniczny?

(C) Uzasadnij, że każda liczba $x \in [0,1)$ ma rozwinięcie dziesiętne: istnieje ciąg cyfr (d_n) taki, że $x = \lim_{n\to\infty}(\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_n}{10^n})$. Uzasadnij, że rozwinięcie to jest jednoznaczne, jeśli tylko $10^n x$ nie jest liczbą całkowitą dla żadnego $n \in \mathbb{N}$. Wyraź d_n przy pomocy x oraz n (wykorzystując odpowiednio podłogę lub sufit).