Lista zadań nr 7: Ciągi — wzór dwumianowy, asymptotyka

(1) Udowodnij, że jeśli $1 \leqslant k \leqslant n$, to $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Wywnioskuj (indukcyjnie!), że współczynniki dwumianowe $\binom{n}{k}$ są liczbami całkowitymi.

(2) Udowodnij, że $\frac{1}{2n}4^n \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ (kombinatorycznie lub indukcyjnie).

(3) Wykorzystując zadanie o średnich Cesàro, udowodnij, że jeśli ciąg (a_n) liczb dodatnich jest zbieżny do liczby dodatniej x, to ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ jest również zbieżny do x.

(4) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$. Wskazówka: dobierz (a_n) tak, aby $a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{n!}{n^n}$ i wykorzystaj poprzednie zadanie.

(5) Udowodnij, że jeśli $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = x$ i $x < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(6) Udowodnij, że jeśli $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = x$. Wywnioskuj, że jeśli $x < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(7) Podaj przykład ciągu (a_n) o dodatnich wyrazach, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ale granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje.

(8) Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$ gdy $b > 1$.

(9) Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ gdy $a > 0$.

(10) Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n} = 0$ gdy $a \in (0, e)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{a^n n!} = 0$ gdy $a \in (e, \infty)$. Wywnioskuj, że $(\frac{n}{3})^n \leqslant n! \leqslant (\frac{n}{2})^n$ dla dostatecznie dużych n.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Rozwiń $(t+s)^4$ i $(t+s)^5$ (bez wykorzystania wzoru dwumianowego Newtona, ale wykorzystując znany wzór $(t+s)^3 = t^3 + 3t^2s + 3ts^2 + s^3$).

(ii) Rozwiń $(1+1)^n$ i $(1-1)^n$ (wykorzystując wzór dwumianowy Newtona).

(iii) Udowodnij, że $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \ldots + \binom{2n}{2n} = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \ldots + \binom{2n}{2n-1}$.

Zadania dodatkowe

(A) *Narysuj* trójkąt Pascala: wypisz na kartce współczynniki dwumianowe $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$ w wierszu o numerze $n+1$ (najlepiej wyśrodkowując każdy wiersz). Następnie zaczerń liczby nieparzyste. Porównaj z rysunkiem *trójkąta Sierpińskiego*.

Przykładowy kod *Mathematica*:

```
Graphics[Reap[
  Table[
   If[
    OddQ[Binomial[n, k]],
    Sow[Rectangle[{k - n/2, -n}, {k + 1 - n/2, -n - 1}]]
   ],
   {n, 0, 100}, {k, 0, n}
  ]
 ][[2, 1]]]
```

(B) Udowodnij, że granicą ciągu o wyrazach $(1+\frac{x}{n})^n$ jest $\exp(x)$. W tym celu wykorzystaj wzór dwumianowy Newtona i podziel uzyskaną sumę na dwie grupy: początkowych $k+1$ wyrazów (k – ustalone) i resztę. Wykaż, że suma początkowych $k+1$ wyrazów dąży $1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!}$. Oszacuj odpowiednio resztę.

(C) Ciąg Fibonacciego $(a_n : n \in \mathbb{N})$ dany jest wzorami $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że:

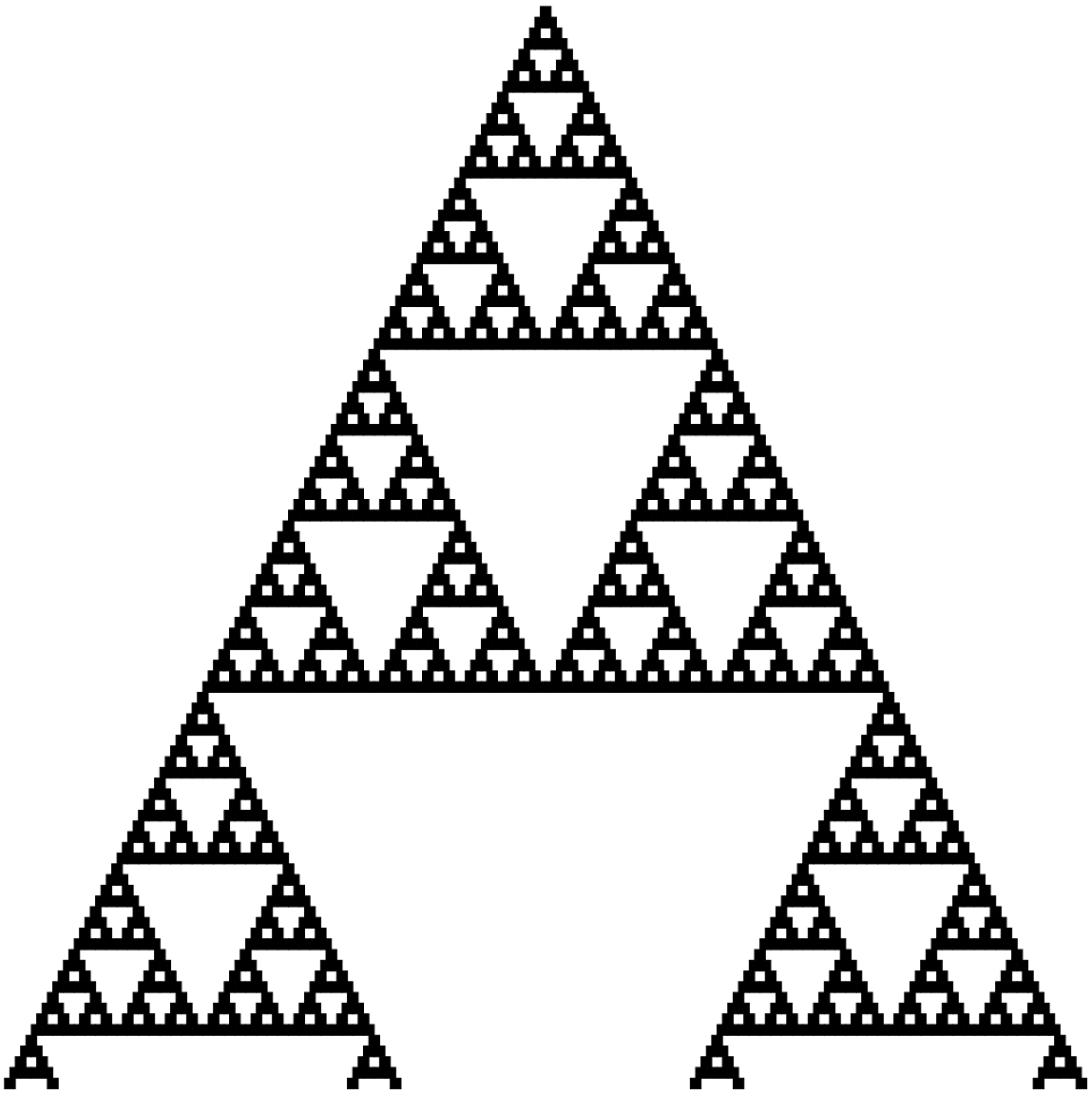
- $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 2$
- $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_{n+1}a_{n+2}$
- $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n$
- $a_{k+l} = a_k a_{l+1} + a_{k+1} a_l$
- $\mathrm{NWD}(a_k, a_l) = a_{\mathrm{NWD}(k,l)}$

(D) Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, zachodzi

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leqslant (1 - \frac{1}{n^2})^n \leqslant 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

Wskazówka: udowodnij wpierw, że kolejne wyrazy rozwnięcia $(1 - \frac{1}{n^2})^n$ ze wzoru dwumianowego Newtona mają coraz mniejsze wartości bezwzględne.

(E) Niech $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1) = \frac{1}{2}$.

(F) Oblicz granicę ciągu o wyrazach $a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$.

(G) Oblicz granicę ciągu o wyrazach $\frac{n^n}{e^n n!}$.