Lista zadań nr 8: Ciągi — obliczanie granic, punkty skupienia

(1) Stosując wzór $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ i prawa arytmetyki granic, oblicz

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{2n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{n})^{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{\sqrt{n}}.$$

(2) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\Big((1+\frac{1}{n})^{n^2}(1-\frac{1}{n})^{n^2}\Big)$.

(3) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^3+1}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$.

(4) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$.

(5) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n^2}}{2^{2^n}}$. Wskazówka: $\dfrac{n^{n^2}}{2^{2^n}} = \left(\dfrac{n}{2^{2^n/n^2}}\right)^{n^2}$ i $2^n/n^2 > n$ dla dużych n.

(6) Udowodnij, że ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{2^n+(-3)^n}$ jest rozbieżny.

(7) Ciągi (a_{2n-1}) oraz (a_{2n}) są zbieżne do x. Udowodnij starannie, że ciąg (a_n) jest zbieżny do x. Zauważ, że analogicznie zbieżność ciągów (a_{3n-2}), (a_{3n-1}) oraz (a_{3n}) do x oznacza zbieżność (a_n) do x.

(8) Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_{3n}=0$. Czy ciąg (a_n) jest zbieżny?

(9) Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n^2}=0$. Czy ciąg (a_n) jest zbieżny?

(10) Każda liczba wymierna jest wyrazem ciągu (a_n). Jaki jest zbiór punktów skupienia ciągu (a_n)?

(11) Udowodnij, że $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}a_n + \limsup\limits_{n\to\infty}b_n$ i uzasadnij, że może zachodzić ostra nierówność. Sformułuj podobne prawo dla $\liminf$.

(12) Wskaż przykład ciągu, którego punktami skupienia są wszystkie liczby ze zbioru $\{0\}\cup\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$ (i tylko te liczby).

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Udowodnij, że ciąg $\lfloor \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \rfloor$ jest rozbieżny.

(ii) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n)^{1/n}$.

(iii) Wskaż przykłady ciągów (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, które spełniają warunki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ jest dowolną, z góry ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $[0,1]$.

(iv) Wskaż analogiczne przykłady ciągów (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, które spełniają warunki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ jest dowolną, z góry ustaloną nieujemną liczbą rzeczywistą.

Zadania dodatkowe

(A) Udowodnij, że jeżeli z każdego podciągu ciągu (a_n) można wybrać jego podciąg zbieżny do x, to ciąg (a_n) jest zbieżny do x.

(B) Udowodnij, że jeśli f jest funkcją rosnącą i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = x$ dla wszystkich ciągów (a_n) rozbieżnych do ∞; w tym zadaniu x jest nieujemną liczbą rzeczywistą lub symbolem ∞.

(C) Wykorzystaj poprzednie zadanie do wyznaczenia $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$.

(D) Wykorzystując dwukrotnie zadanie (B), udowodnij wpierw, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, a następnie, że w takim razie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n} = 0$ dla dowolnego ciągu (a_n) rozbieżnego do ∞.

(E) Wywnioskuj, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[\sqrt{n}]{n}$.

(F) Niech (k_n) będzie permutacją zbioru $\mathbb{N}$, tj. ciągiem liczb naturalnych, w którym każda liczba naturalna występuje dokładnie raz. Udowodnij, że jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to zbieżny jest również ciąg (a_{k_n}).

(G) Przypuśćmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ oraz $\sqrt{b} \notin \mathbb{Z}$. Niech $p = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$. Kiedy ciąg $a_n = p^n - \lfloor p^n \rfloor$ jest zbieżny?

(H) Udowodnij, że każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest punktem skupienia ciągu $(n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor)$ i wobec tego jego granicą górną jest 1, a granicą dolną 0.